

Оглавление

1.ЛИНЕЙНЫЕ И ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА	5
2.ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД	14
3.ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД ФУРЬЕ	17
4.ПРИМЕНЕНИЕ РЯДА ФУРЬЕ	44
5.НЕТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ	56
6.ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	70
7.СВЕРТКА ФУНКЦИЙ	84
8.ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ	88
9.ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ	106
10. ЗАДАЧИ	116

Кафедра Высшей математики РБРТУ

Считается, что самый первый тригонометрический ряд был выписан Леонардо Эйлером. В его работе «Дифференциальное исчисление», появившейся в 1755 году¹, в главе «О представлении функций рядами» можно найти следующее равенство:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots, x \in (0; 2\pi).$$

Приблизительно в это же время Даниил Бернулли по поводу задачи о колебании струны впервые высказывает догадку в возможности аналитического выражения «любой линии» на отрезке $[0, 2\pi]$ рядом синусов и косинусов кратных дуг. Однако положение здесь в значительной степени оставалось невыясненным вплоть до 1805 года², когда Жан Батист Жозеф Фурье в трактате о распространении тепла внутри твердых тел представил формулы для коэффициентов разложения функции в ряд по синусам и косинусам кратных дуг. Именно с его именем стали связывать следующие формулы для вычисления «коэффициентов Фурье»:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \text{ и } b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

для функции $f(x)$ с периодом 2π , представимой в виде суммы тригонометрического ряда

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Следует, однако, подчеркнуть, что вопрос о представлении более или менее произвольной функции (с периодом 2π) в виде суммы тригонометрического ряда вовсе не был решен Фурье, и еще на протяжении целого столетия математики занимались поисками тех или иных условий, при которых такое представление в том или ином смысле имеет место.

¹ В действительности впервые о нем Эйлер сообщил в письме к Гольдбаху в 1744 году.

² Книга Фурье "Аналитическая теория теплоты" (Teo'rie analytique de la chaleur) была опубликована в 1822 году. «Великой математической поэмой» назвал этот труд лорд Кельвин.

В настоящее время уже давно является очевидным тот факт, что теория рядов Фурье существенно зависит от понятия интеграла¹. Принимая в формулах Фурье все более и более общее определение интеграла (Коши, Римана, Лебега, Данжуа), мы все более и более будем расширять класс тригонометрических рядов Фурье. В настоящее время проводится разграничение даже между общими тригонометрическими рядами и тригонометрическими рядами Фурье. Так, например, тригонометрический ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$$

сходится всюду, но не является рядом Фурье никакой интегрируемой (по Лебегу) функции.

Наконец, следует отметить, что благодаря работам Дэвида Гильберта (начало XX века) стало возможным излагать теорию рядов Фурье в геометрической форме как теорию ортогональных (не только тригонометрических) разложений.

Дальнейшее изложение в предлагаемой работе ориентировано на использование интеграла Римана². Это, с одной стороны, вполне достаточно для применения, но с другой — не позволит осмыслить многие факты, касающиеся сходимости рядов Фурье. По образному выражению Хевисайда³, «станете ли Вы отказываться от обеда только потому, что Вам не полностью понятен процесс пищеварения?»

1. Линейные и евклидовы пространства

1.1. Комплексные числа и функции

Напомним, что множество комплексных чисел — это множество упорядоченных пар вещественных чисел $z = (x, y)$ с операциями комплексного сложения

¹ Это было отмечено еще Н.Н.Лузиным в его диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» в 1915 году.

² А не на более общий и более пригодный для данных моделей интеграл Лебега.

³ Оливер Хевисайд — английский физик и инженер, создатель операционного исчисления.

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (1.1)$$

и комплексного умножения

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

относительно которых множество комплексных чисел становится числовым полем \mathbf{C} . Важно также, что относительно комплексного сложения и умножения на вещественные числа

$$c \cdot (x, y) = (cx, cy)$$

поле \mathbf{C} можно рассматривать как двумерное вещественное векторное пространство \mathbf{R}^2 , т.е. плоскость. Комплексное число вида $(x, 0)$ при этом отождествляется с вещественным числом x . Выбирая в качестве базиса в \mathbf{R}^2 стандартный: $1 = (1, 0)$ и $i = (0, 1)$, приходим к алгебраической записи комплексного числа

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Помимо упомянутых форм записи комплексного числа также применяется тригонометрическая и показательная (Эйлера) форма

$$z = (x, y) = x + iy = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z|e^{i\varphi},$$

где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа, $\varphi = \arg z$ - аргумент (главное значение аргумента): $\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$, $\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$.

Комплексно сопряженное число \bar{z} вводится равенством

$$\bar{z} = (x, -y) = x - iy = |z|(\cos \varphi - i \sin \varphi) = |z|e^{-i\varphi}.$$

Операция предельного перехода и суммирования определяется покоординатно. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad \text{и} \quad \sum z_n = \sum x_n + i \sum y_n,$$

где $z_n = x_n + iy_n$ - последовательность комплексных чисел.

Аналогично, если $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ — комплекснозначная функция вещественной переменной t , то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \quad z'(t) = x'(t) + iy'(t) \text{ и}$$

$$\int_a^b z(t) dt = \int_a^b x(t) dt + i \int_a^b y(t) dt.$$

Вместе с тем комплексная плоскость \mathbf{C} является метрическим пространством, функция расстояния d на котором определена модулем разности комплексных чисел

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|,$$

и операция предельного перехода может быть описана на языке « $\varepsilon - \delta$ » формально так же, как и в вещественном случае (с заменой слов «абсолютная величина» словом «модуль»).

Например, критерий Коши существования конечного предела последовательности $\{z_k\}$ будет записываться так: последовательность $\{z_k\}$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда она фундаментальна, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} : n, m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

1.2. Комплексная экспонента

В тригонометрической теории (комплексных) рядов Фурье исключительную роль играет комплексная экспонента $\exp(it) \equiv e^{it}$. Эта функция может быть определена любым из следующих эквивалентных способов:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{it} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{it}{n}\right)^n \quad \text{или} \quad e^{it} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}.$$

Отметим, что это периодическая функция с периодом, равным 2π и $|e^{it}| = 1$ ($t \in \mathbf{R}$).

Когда аргумент t пробегает отрезок $[0, 2\pi)$, точка $z = e^{it}$ пробегает на комплексной плоскости единичную окружность с центром в начале координат в направлении против хода часовой стрелки. Как и вещественная экспонента, комплексная обладает свойством

$$e^{is} \cdot e^{it} = e^{i(s+t)}.$$

Заметим, что функция e^{int} , $n \in \mathbf{Z}$, также периодическая с наименьшим периодом $\frac{2\pi}{|n|}$ ($n \neq 0$), так что число 2π является общим периодом для всех этих экспонент. Если $n \neq 0$, то e^{int} является производной функции $\frac{e^{int}}{in}$, которая также имеет период 2π , так что справедливо

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \begin{cases} 2\pi, & n = 0, \\ 0, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.2)$$

Лемма 1.1 (Интегрирование периодических функций). Пусть $f(t)$ – непрерывная комплекснозначная периодическая функция с периодом T . Тогда $\forall a \in \mathbf{R}$ справедливо

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

Доказательство. В силу аддитивности определенного интеграла выполняется

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t) dt &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt = \\ &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a f(s+T) ds = \\ &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a f(s) ds = \int_0^T f(t) dt. \end{aligned}$$

1.3. Евклидово пространство

Напомним, что евклидово¹ пространство — это комплексное векторное пространство \mathbf{V} со скалярным произведением (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$, над полем комплексных чисел \mathbf{C} . Основные свойства комплексного скалярного произведения $(\lambda, \mu \in \mathbf{C})$:

¹ Унитарное, эрмитово, комплексное евклидово пространство.

1) вещественная линейность по первому элементу
 $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b}, \mathbf{c});$

2) комплексная линейность по второму элементу
 $(\mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}) = \bar{\lambda}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \bar{\mu}(\mathbf{a}, \mathbf{c});$

3) комплексная коммутативность $(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \overline{(\mathbf{a}, \mathbf{b})};$

4) неотрицательность квадрата $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0;$

5) $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.$

Неотрицательное число $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$ называется евклидовой¹ нормой вектора. Как и всякая норма, евклидова норма подчиняется свойствам:

1) $\|\lambda \mathbf{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|;$

2) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|;$

3) $\|\mathbf{a}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.$

Теорема 1.1 (Неравенство Буняковского²). Для произвольных элементов \mathbf{a}, \mathbf{b} векторного пространства V справедливо неравенство

$$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|. \quad (1.3)$$

Доказательство. Пусть $\theta = \arg(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Тогда $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |(\mathbf{a}, \mathbf{b})|e^{i\theta}$. Для произвольного действительного числа x справедливо тождество

$$\begin{aligned} (xe^{i\theta} \mathbf{a} + \mathbf{b}, xe^{i\theta} \mathbf{a} + \mathbf{b}) &= x^2(\mathbf{a}, \mathbf{a}) + xe^{i\theta}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + xe^{-i\theta}(\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) =, \\ &= x^2\|\mathbf{a}\|^2 + 2x|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| + \|\mathbf{b}\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда (условие неположительности дискриминанта) и вытекает искомое неравенство.

Функция

¹ Эрмитова норма.

² Коши, Шварца.

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \quad (1.4)$$

имеет смысл (эрмитова) расстояния между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

Последовательность (система) векторов $(\mathbf{e}_k), k \in \mathbf{N}$ называется ортонормированной, если эти векторы взаимно ортогональны и имеют норму, равную единице:

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

Для произвольного вектора $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ комплексные числа $c_k = c_k(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_k)$ называются коэффициентами Фурье вектора \mathbf{a} относительно ортонормированной системы (\mathbf{e}_k) .

Теорема 1.2 (Свойство проекции). Пусть \mathbf{a} – произвольный вектор из \mathbf{V} . Положим $\mathbf{b} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k$, где $c_k = c_k(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_k)$ – коэффициенты Фурье вектора \mathbf{a} относительно ортонормированной системы (\mathbf{e}_k) . Тогда справедливо $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$.

Доказательство. Заметим, что при $k < n$ выполняется $c_k(\mathbf{b}) = c_k(\mathbf{a})$, так что при $k \leq n$ получаем $(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_k) - (\mathbf{b}, \mathbf{e}_k) = c_k - c_k = 0$. Тогда

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b}) = \left(\mathbf{a} - \mathbf{b}, \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k \right) = \sum_{k=1}^n \overline{c_k} (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{e}_k) = 0.$$

Напомним теорему Пифагора.

Теорема 1.3 (Теорема Пифагора).

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Доказательство:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Следствие 1.1. Если (\mathbf{e}_k) — ортонормированная система, то $\left\| \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{e}_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |C_k|^2$.

Доказательство. Достаточно $(n-1)$ раз применить теорему Пифагора и учесть, что выполняется $\|C_k \mathbf{e}_k\| = |C_k| \cdot \|\mathbf{e}_k\| = |C_k|$.

Теорема 1.4 (Неравенство Бесселя). Пусть $c_k = c_k(\mathbf{a})$ — последовательность коэффициентов Фурье произвольного вектора \mathbf{a} относительно некоторой ортонормированной системы векторов (\mathbf{e}_k) . Тогда $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b} = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k$. Тогда в силу тождества $\mathbf{a} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b}$ и теорем 1.2 и 1.3 получаем $\|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$. Откуда следует неравенство $\|\mathbf{b}\|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2$, или что то же самое $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2$.

Последнее неравенство в силу произвольности n (и неотрицательности членов ряда) приводит к утверждению теоремы.

Следствие 1.2 (Лемма Римана - Лебега). Пусть \mathbf{a} — произвольный вектор и $c_k = c_k(\mathbf{a})$ — соответствующие коэффициенты Фурье относительно произвольной ортонормированной системы (\mathbf{e}_k) . Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k(\mathbf{a}) = 0$.

Доказательство. Применить необходимый признак сходимости ряда.

Рассмотрим произвольную конечную линейную комбинацию $\sum_{k=1}^n C_k \mathbf{e}_k$ по ортонормированной системе. Здесь коэффициенты линейной комбинации C_k — суть произвольные комплексные числа. С учетом теоремы 1.2 справедливо тождество

$$\begin{aligned}
 J_n(C) &= \left\| \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{e}_k - \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2 = \\
 &= \left\| \sum_{k=1}^n (C_k - c_k) \mathbf{e}_k + \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2 = \sum_{k=1}^n |C_k - c_k|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2.
 \end{aligned}$$

Назовем выражение $J_n(C)$ – квадратом уклонения (по норме) произвольной линейной комбинации от вектора \mathbf{a} . Следующая теорема устанавливает основное геометрическое свойство коэффициентов Фурье.

Теорема 1.5 (Экстремальное свойство коэффициентов Фурье). Пусть (\mathbf{e}_k) – произвольная ортонормированная система и \mathbf{a} – произвольный вектор из V . Функция

$$J_n(C) = \left\| \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2$$

достигает своего наименьшего значения на коэффициентах Фурье вектора \mathbf{a}

$$C_1 = c_1(\mathbf{a}), C_2 = c_2(\mathbf{a}), \dots, C_n = c_n(\mathbf{a}).$$

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что функция $J_n(C)$ – суть сумма двух неотрицательных слагаемых. Только первое слагаемое зависит от произвольных коэффициентов линейной комбинации. Если первое слагаемое равно нулю, то есть $C_k = c_k = c_k(\mathbf{a})$ для всех значений индекса, то уклонение будет наименьшим:

$$J_n(C) = \left\| \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2 \geq \left\| \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = J_n(c(\mathbf{a})). \quad (1.5)$$

Геометрический смысл теоремы 1.5 вполне очевиден (см. рис. 1.1). Рассмотренную задачу можно охарактеризовать как задачу об аппроксимации вектора \mathbf{a} линейными комбинациями фиксированной ортонормированной системы векторов (\mathbf{e}_k) :

$$\mathbf{a} \approx \sum_{k=1}^n C_k \mathbf{e}_k.$$

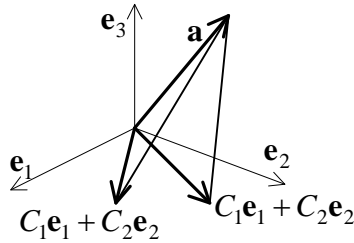


Рис. 1.1. Вектор и линейные комбинации базисных векторов

Наилучшая (в смысле евклидовой нормы) аппроксимация получается на коэффициентах Фурье. Заметим, также, что расширение ортонормированной системы (т.е. увеличение количества слагаемых в линейной комбинации) может привести только к улучшению аппроксимации (т.е. уменьшению наименьшего значения $J_n(C)$):

$$\left\| \sum_{k=1}^{n+1} c_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k - \mathbf{a} \right\|^2. \quad (1.6)$$

1.4. Полнота и замкнутость ортонормированной системы

Вернемся к абстрактным обозначениям. Пусть (\mathbf{e}_k) — ортонормированная система в евклидовом пространстве \mathbf{V} . Она называется полной, если

$$\forall \mathbf{a} \perp \mathbf{e}_k (\forall k) \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Полнота понимается в том смысле, что систему нельзя расширить, добавляя к ней новые векторы, отличные от нуля. Ортонормированная система называется замкнутой, если

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V} : \|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(\mathbf{a})|^2,$$

т.е. для произвольного вектора выполнено равенство Парсеваля (уравнение замкнутости). Как мы знаем, замкнутость означает возможность аппроксимировать (в смысле евклидовой нормы) произвольный вектор \mathbf{a} частичными суммами Фурье с любой степенью точности, т.е.

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbf{V} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{a} - \sum_{k=1}^n c_k(\mathbf{a}) \mathbf{e}_k \right\| = 0.$$

Легко видеть, что полнота ортонормированной системы является следствием ее замкнутости. Действительно, если вектор ортогонален всем векторам замкнутой системы, то в силу уравнения замкнутости норма такого вектора равна нулю, а следовательно, и сам вектор равен нулю.

Можно показать (методами теории гильбертовых пространств), что в действительности понятия замкнутости и полноты равносильны.

2. Тригонометрический ряд

2.1. Определения

Определение 2.1 (Вещественная форма). Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две последовательности комплексных чисел. Тригонометрическим рядом называется ряд

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.1)$$

Заметим, что при $k \in \mathbf{N}$ справедливы тождественные соотношения

$$a_k \cos kx + a_k \sin kx = a_k \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx},$$

где $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$. И наоборот,

$$\begin{aligned} c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx} &= c_k (\cos kx + i \sin kx) + c_{-k} (\cos kx - i \sin kx) = \\ &= a_k \cos kx + b_k \sin kx, \end{aligned}$$

где $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$. Отсюда справедливо

Определение 2.2 (Комплексная форма). Пусть $\{z_k\}$, $k \in \mathbf{Z}$ – последовательность комплексных чисел. Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (2.2)$$

Переход от вещественной формы тригонометрического ряда к комплексной и наоборот осуществляется пересчетом коэффициентов

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbf{N}.$$

2.2. Случай равномерной сходимости

Теорема 2.1. Пусть тригонометрический ряд удовлетворяет любому из следующих эквивалентных условий: сходятся неотрицательные числовые ряды $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ или

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_{-k}|. \quad \text{Тогда тригонометрический ряд (2.1) или (2.2)}$$

сходится равномерно на \mathbf{R} к непрерывной периодической с периодом 2π функции $f(x)$, причем справедливы равенства

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Доказательство. Эквивалентность условий теоремы следует из неравенств

$$|a_k| \leq |c_k| + |c_{-k}|, \quad |b_k| \leq |c_k| + |c_{-k}|,$$

$$|c_k| \leq \frac{|a_k| + |b_k|}{2}, \quad |c_{-k}| \leq \frac{|a_k| + |b_k|}{2}.$$

Далее, в силу выполнения неравенства $|c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}| \leq |c_k| + |c_{-k}|$ тригонометрический ряд имеет

мажорантный сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| + |c_{-k}|$. В силу признака Вейерштрасса тригонометрический ряд сходится равномерно на \mathbf{R} . Поскольку члены тригонометрического ряда являются непрерывными периодическими функциями с периодом 2π , таковой будет и сумма ряда (в силу равномерной сходимости). Обозначим сумму ряда через $f(x)$:

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}), \quad x \in \mathbf{R}.$$

В силу справедливости неравенства $|(c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) e^{-imx}| \leq |c_k| + |c_{-k}|$ ряд

$$c_0 e^{-imx} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) e^{-imx}, \quad x \in \mathbf{R},$$

равномерно сходится к функции $f(x) e^{-imx}$, и этот ряд можно почленно интегрировать. В силу (2.1) все члены ряда при интегрировании по интервалу $[0, 2\pi]$ обращаются в ноль, за исключением слагаемого с номером $m = k$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx = c_m, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Соотношения для a_k и b_k вытекают из (2.2) и формул Эйлера.

Замечание 2.1. Формулы для коэффициентов a_k , b_k и c_k в силу леммы 1.1 могут быть переписаны, например, в виде

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

3. Тригонометрический ряд Фурье

3.1. Постановка вопроса

Посмотрим на проблему с другой стороны. Пусть теперь $f(x)$ – произвольная непрерывная периодическая с периодом 2π функция. Определим по ней последовательности чисел a_k , b_k и c_k согласно формулам

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbf{Z}, \quad (3.1)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.2)$$

см. также замечание 2.1. Эти коэффициенты называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Формулы перехода между комплексными и вещественными коэффициентами определяются равенствами

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k \in \mathbf{N},$$

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbf{N}. \quad (3.3)$$

(Отметим отличие от предыдущей нормировки при $n = 0$.) Сопоставим функции $f(x)$ тригонометрический ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Он называется (тригонометрическим) рядом Фурье функции $f(x)$. Что можно сказать о сходимости этого ряда? Если ряд сходится, что собой представляет его сумма, какое отношение она имеет к функции $f(x)$? Что будет происходить со всеми этими соотношениями, если функцию $f(x)$ выбирать более гладкой или, наоборот, менее гладкой?

Таковы, в общих чертах, вопросы, которые нас будут интересовать в дальнейшем. Однако для ответов на поставленные вопросы полезно вспомнить элементарные сведения о линейных пространствах.

3.2. Ряды Фурье на пространстве непрерывных 2π -периодических функций

Очевидно, пространство (комплекснозначных) непрерывных периодических с периодом 2π функций является комплексным векторным пространством: такие функции можно складывать и умножать на комплексные числа, не выходя за рамки этого множества функций. Превратим это пространство в евклидово пространство, введя в нем скалярное произведение

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (3.4)$$

Первые три свойства скалярного произведения очевидны. Четвертое свойство является следствием непрерывности рассматриваемых функций. Действительно, если

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \equiv 0,$$

то $f(x) = 0, \forall x \in \mathbf{R}$ именно благодаря своей непрерывности¹.

Обозначим это унитарное пространство (комплекснозначных) непрерывных периодических с периодом 2π функций через $\mathbf{C}_{2\pi}$. Символами $\mathbf{e}_k, k \in \mathbf{Z}$, будем обозначать функции e^{ikx} . Покажем, что функции $\mathbf{e}_k, k \in \mathbf{Z}$, образуют ортонормированную систему в пространстве $\mathbf{C}_{2\pi}$. С учетом (2.1) имеем

$$(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \delta_{kl}.$$

Если $f(x)$ — произвольная непрерывная периодическая с периодом 2π функция, то ее коэффициенты Фурье относительно ортонормированной системы (\mathbf{e}_k) равны

¹ Для разрывных функций такого заключения сделать уже нельзя.

$$c_k(f) = (f, e_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (3.5)$$

Заметим, что в силу леммы Римана-Лебега

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = 0.$$

Неравенство Бесселя принимает вид

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx, \quad \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Далее мы покажем, что для $f \in \mathbf{C}_{2\pi}$ неравенство Бесселя превращается в равенство

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx,$$

которое называется равенством Парсеваля или уравнением замкнутости.

Функции вида

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^n C_k e^{ikx}$$

называются тригонометрическими полиномами. Среди всех тригонометрических полиномов степени не выше n наилучшей аппроксимацией (в смысле среднеквадратичной нормы) функции $f(x)$ является частичная сумма ряда Фурье этой функции

$$f(x) \approx \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}.$$

Пример 3.1. Найти евклидову норму функции $f(x) = 2i - x$ на $[0, 2\pi]$.

Решение. Для нахождения квадрата нормы функции будем использовать формулу $\|f(x)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. Тогда для функции $f(x) = 2i - x$ найдем ее модуль:

$$|f(x)| = |2i - x| = \sqrt{(-x)^2 + 2^2} = \sqrt{x^2 + 4}.$$

Затем можно находить квадрат нормы заданной функции:

$$\begin{aligned}\|f(x)\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |2i - x|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{x^2 + 4} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(2 \ln \left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 4} \right) - 2 \ln 2 + \pi \sqrt{4\pi^2 + 4} \right),\end{aligned}$$

откуда искомая норма есть корень квадратный из последнего числа.

Пример 3.2. Найти расстояние между функциями $f(x) = i(x-1)$ и $g(x) = 2\sqrt{x}$ на $[0, 2\pi]$.

Решение. Для нахождения расстояния между функциями будем использовать формулу:

$$d(f, g) = \|f(x) - g(x)\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx}.$$

Найдем модуль разности:

$$|f(x) - g(x)| = |i(x-1) - 2\sqrt{x}| = \sqrt{(-2\sqrt{x})^2 + (x-1)^2} = x+1.$$

Тогда можно вычислить искомое расстояние:

$$d(f, g) = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x+1)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left. \frac{(x+1)^3}{3} \right|_0^{2\pi}} = \sqrt{\frac{4}{3} \pi^2 + 2\pi + 1}.$$

Пример 3.3. Найти скалярное произведение (f, g) функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = 2x - i$ на $[0, 2\pi]$.

Решение. Так как $(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \overline{g(x)} dx$ (см. формулу

3.4) и $\overline{g(x)} = \overline{2x - i} = 2x + i$, то тогда:

$$\begin{aligned}(f, g) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cdot (2x + i) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left((2x + i) \cos x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} \cos x dx \right) = 2.\end{aligned}$$

3.3. Свертка периодических функций

Определение 3.1. Пусть f и g – произвольные непрерывные периодические с периодом 2π функции. Их сверткой $f * g(x)$ называется функция

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt, \forall x \in \mathbf{R}.$$

Очевидно, свертка $f * g(x)$ – периодическая с периодом 2π и непрерывная функция:

$$\begin{aligned} f * g(x + 2\pi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x + 2\pi - t)dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x - t)dt = f * g(x), \end{aligned}$$

поскольку $g(x)$ периодична. Чтобы показать непрерывность, заметим, что $g(x)$ равномерно непрерывна, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |g(x_2) - g(x_1)| < \varepsilon.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое δ по числу $\frac{\varepsilon}{M}$, где

$M = \sup_{t \in [0; 2\pi]} |f(t)|$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f * g(x_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot (g(x-t) - g(x_0-t))dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| \cdot |g(x-t) - g(x_0-t)| dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. Пусть f – периодическая с периодом 2π и непрерывная функция. Если функция g является непрерывно дифференцируемой периодической с периодом 2π , то

свертка $f * g(x)$ также является непрерывно дифференцируемой периодической с периодом 2π и выполняется

$$(f * g)'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g'(x-t)dt.$$

Доказательство. Следствие теоремы о дифференцировании интеграла по параметру: в данном случае частная производная подынтегральной функции

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(t)g(x-t)) = f(t)g'(x-t).$$

Следствие 3.1. Если g непрерывно дифференцируема k раз, то свертка $f * g(x)$ (где f – непрерывна) – тоже k раз непрерывно дифференцируема и

$$(f * g)^{(k)} = f * g^{(k)}.$$

Очевидны следующие свойства свертки.

Теорема 3.2. Свертка функций является билинейной, коммутативной и ассоциативной операцией, т.е.

- 1) $(\alpha f + \beta g) * h = \alpha f * h + \beta g * h$;
- 2) $f * g = g * f$;
- 3) $f * (g * h) = (f * g) * h = f * g * h$.

Доказательство. Линейность по первому аргументу очевидна в силу линейности интеграла. Линейность по второму аргументу может быть установлена аналогично, но она также является следствием коммутативности. Докажем коммутативность.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)dt = \left| \begin{array}{l} x-t=u, \\ dt=-du \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_x^{x-2\pi} f(x-u)g(u)du = \frac{1}{2\pi} \int_{x-2\pi}^x f(x-u)g(u)du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-u)g(u)du = g * f(x). \end{aligned}$$

Докажем теперь ассоциативность.

$$\begin{aligned}
(f * g) * h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f * g(t) \cdot h(x-t) dt = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) g(t-s) ds h(x-t) dt = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(s) ds \int_{-x}^{2\pi-x} g(u) h(x-s-u) du = \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} f(s) ds \int_0^{2\pi} g(u) h(x-s-u) du = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) g * h(x-s) ds = f * (g * h)(x).
\end{aligned}$$

Для приложений важность понятия свертки определяется следующим свойством, которое также объясняет свойства, описанные в предыдущей теореме.

Теорема 3.3. Пусть f и g - произвольные непрерывные периодические с периодом 2π функции. Тогда

$$c_k(f * g) = c_k(f) \cdot c_k(g),$$

где c_k - коэффициент Фурье соответствующей функции относительно ортонормированной системы экспонент e_k .

Доказательство. Заметим сначала, что

$$f * e_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = c_k(f) e_k(x),$$

так что

$$f * e_k = c_k(f) e_k. \quad (3.6)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
c_k(f * g) &= (f * g) e_k(0) = f * (g * e_k)(0) = f * (c_k(g) e_k)(0) = \\
&= c_k(g) f * e_k(0) = c_k(g) c_k(f).
\end{aligned}$$

В приложениях отображение $f \mapsto f * g$ описывает прохождение сигнала f через фильтр g . В результате амплитуда

$c_k(f)$ k -й гармоники сигнала умножается на $c_k(g)$. Заметим, что в силу теоремы Римана-Лебега не может существовать идеального фильтра, не искажающего сигнал:

$$\neg \exists g : f * g = f.$$

Но вернемся к теореме 3.1. Она позволяет установить одно важное для дальнейшего свойство. Обозначим через $\mathbf{C}_{2\pi}^1$ множество непрерывно дифференцируемых периодических с периодом 2π функций. Это подмножество в пространстве $\mathbf{C}_{2\pi}$.

Теорема 3.4 (Плотность $\mathbf{C}_{2\pi}^1$ в $\mathbf{C}_{2\pi}$). Пространство функций $\mathbf{C}_{2\pi}^1$ плотно в $\mathbf{C}_{2\pi}$, т.е. $\forall f \in \mathbf{C}_{2\pi}$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in \mathbf{C}_{2\pi}^1$:

$$\|f - g\|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in [0; 2\pi]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Функция $f(x)$ — равномерно непрерывна и, следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и δ найдено. Возьмем произвольную функцию $\omega \in \mathbf{C}_{2\pi}^1$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) неотрицательность $\omega(x) \geq 0$; 2) четность $\omega(x)$ - четная функция; 3) $\omega(x) = 0$, при $x \in [\delta; \pi]$; 4) нормировка

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(x) dx = 1, \text{ при } x \in [\delta; \pi].$$

Подобрать такую функцию нетрудно. Например (см. рис. 3.1): на интервале $(-\delta; \delta)$ задать функцию $k \left(\cos \frac{\pi x}{\delta} + 1 \right)$, затем продолжить нулем на оставшуюся часть интервала $[-\pi; \pi]$ и далее продолжить периодически на всю ось. Константу k следует выбрать так, чтобы выполнялось условие нормировки 4).

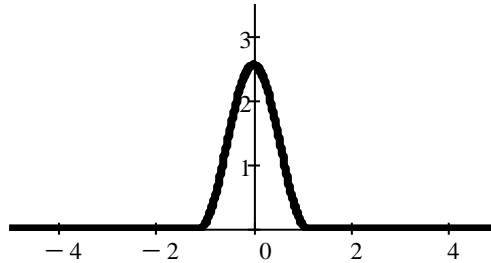


Рис. 3.1. Пример сглаживающей функции

Мы покажем (со ссылкой на теорему 3.1), что свертка $f * \omega$ может быть использована в качестве функции g . Заметим, прежде всего, что в силу четности и периодичности

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(x-t) dt = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} f(x) \int_0^{2\pi} \omega(x-t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \omega(x-t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - f(t)| \omega(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|x-t| \leq \delta} |f(x) - f(t)| \omega(x-t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|x-t| \leq \delta} \omega(x-t) dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

3.4. Сходимость рядов Фурье

Далее нам понадобится чуть более общий вариант леммы Римана-Лебега.

Теорема 3.5 (Лемма Римана-Лебега). Если $f(x)$ – непрерывная функция на $[a, b]$ то справедливо предельное равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала непрерывно дифференцируемую на отрезке $[a, b]$ функцию $g(x)$. Тогда

$$\int_a^b g(t)e^{i\lambda t} dt = \int_a^b g(t) d \frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda} = \frac{g(b)e^{i\lambda b}}{i\lambda} - \frac{g(a)e^{i\lambda a}}{i\lambda} - \frac{1}{i\lambda} \int_a^b g'(t)e^{i\lambda t} dt.$$

Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Функция $f(x)$ может быть равномерно аппроксимирована непрерывно дифференцируемой функцией $g(x)$. Например, можно использовать конструкцию типа $f * g$. Продолжим $f(x)$ непрерывно на всю ось так, чтобы вне интервала $[a-1, b+1]$ она обращалась в ноль [например, можно соединить прямыми точки $(a, f(a))$ и $(a-1, 0)$ с одной стороны и точки $(b, f(b))$ и $(b+1, 0)$ с другой, а далее считать функцию $f(x)$ нулем]. Такая продолженная функция $f(x)$ равномерно непрерывна и, фиксируя произвольно $\varepsilon > 0$, можно выбрать $\delta > 0$ такое, что $|x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. Выберем далее функцию $\omega(x)$ так, чтобы она была положительной непрерывно дифференцируемой четной функцией, равной нулю при $|x| > \delta$ и такой, чтобы $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) dx = 1$. Разумеется, последний интеграл не является несобственным, в действительности интегрирование ведется только по интервалу $[-\delta, \delta]$. Составим далее свертку

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \omega(x-t) dt,$$

где под $f(x)$ понимается продолженная функция. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-t) dt = 1,$$

и, как и ранее (в периодическом случае), получаем оценку $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех x , в частности для исходной функ-

ции $f(x)$, если $x \in [a, b]$. Выберем $g(x)$ так, чтобы $\|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Пусть λ таково, что

$$\left| \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) e^{i\lambda x} dx \right| &\leq \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) e^{i\lambda x} dx \right| + \left| \int_a^b g(x) e^{i\lambda x} dx \right| \leq \\ &\leq (b-a) \|f - g\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь, чтобы сформулировать основную теорему о сходимости, нам потребуется дополнительное понятие.

Определение 3.2. Функция $D_n(x) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$ называется

ядром Дирихле.

Лемма 3.1. Ядро Дирихле $D_n(x)$ является непрерывной периодической с периодом 2π четной функцией, равной

$$D_n(x) = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}, \text{ причем выполняется } \int_0^{2\pi} D_n(x) dx = 1. \quad (3.7)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{j=0}^{2n} (e^{ix})^j = e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \\ &= e^{-inx} \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x} - e^{-i\frac{2n+1}{2}x}}{1 - e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

откуда вытекает также свойство четности. Равенство (3.7) вытекает из (1.2).

Ядро Дирихле замечательно тем, что частичная сумма Фурье функции $f(x)$ является сверткой функции $f(x)$ с ядром Дирихле, как сразу следует из (3.6) и билинейности свертки:

$$f * D_n = f * \sum_{k=-n}^n e_k = \sum_{k=-n}^n f * e_k = \sum_{k=-n}^n c_k(f) \cdot e_k.$$

Теорема 3.6 (Дирихле). Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и периодична с периодом 2π , то ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ поточечно:

$$f(x) \in C_{2\pi}^1 \Rightarrow f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(x) - f * D_n(x) &= f(x) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_n(x-t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x) - f(t)) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x) - f(t)}{x-t} \frac{x-t}{\sin \frac{x-t}{2}} \sin \frac{2n+1}{2}(x-t) dt. \end{aligned}$$

Используя результат леммы Римана-Лебега и учитывая непрерывность (по переменной t) функций

$$\frac{f(x) - f(t)}{x-t} = \int_0^1 f'(t + (x-t)\tau) d\tau \quad \text{и} \quad \frac{x-t}{\sin \frac{x-t}{2}},$$

приходим к предельному соотношению $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - f * D_n(x)) = 0$, которое и доказывает теорему.

Теорема 3.7 (Дирихле). Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и периодична с периодом 2π , то ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ равномерно.

Доказательство. Здесь следует учитывать скорость убывания коэффициентов Фурье. Пусть $f(x) \in C_{2\pi}^1$. Тогда

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) d \frac{e^{-ikx}}{-ik} = \\ &= \frac{1}{2\pi ik} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \frac{c_k(f')}{ik}. \end{aligned}$$

Но

$$|c_k(f)| = \left| \frac{c_k(f')}{k} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |c_k(f')|^2 \right).$$

В силу неравенства Бесселя ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f')|^2$ сходится.

Также сходится и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. И тогда заключаем, что сходится

ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|$. В силу теоремы 2.1 ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к своей сумме равномерно. Но в силу предыдущей теоремы его суммой является функция $f(x)$.

Теорема 3.8 (Основная). Если функция $f(x)$ непрерывна и периодична с периодом 2π , то ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ в среднеквадратичном смысле, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \right\| = 0.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Аппроксимируем функцию $f(x)$ равномерно функцией $g(x) \in C_{2\pi}^1$ так, чтобы $\|f - g\|_{\infty} < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу теоремы Дирихле, если n достаточно велико, $\left\| g - \sum_{k=-n}^n c_k(g) e_k \right\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Из этих оценок и экстремального свойства коэффициентов Фурье находим

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \right\| &\leq \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k(g) e_k \right\| \leq \|f - g\| + \left\| g - \sum_{k=-n}^n c_k(g) e_k \right\| \leq \\ &\leq \|f - g\|_{\infty} + \left\| g - \sum_{k=-n}^n c_k(g) e_k \right\|_{\infty} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Замечание 3.1. Этот же результат может быть получен как следствие плотности тригонометрических полиномов в про-

пространстве $C_{2\pi}$ (теорема Стоуна - Вейерштрасса). Аналогичный конструктивный подход основан на теореме Фейера, где тригонометрический полином, являющийся равномерным приближением данной непрерывной функции, строится явно (как среднее арифметическое частичных сумм Фурье).

Следствие 3.2 (Равенство Парсеваля). Если функция $f(x)$ непрерывна и периодична с периодом 2π , то справедливо тождество

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением экстремальности (1.5):

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \right\| = \|f\| + \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2.$$

По доказанному в теореме левая часть тождества стремится к нулю. Значит, стремится к нулю и правая часть, это приводит к выполнению равенства Парсеваля.

Вещественная форма равенства Парсеваля имеет вид

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx,$$

так как из формул (3.3) следует

$$|c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = \frac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2}, k \in \mathbf{N}.$$

В предыдущем пункте было, таким образом, доказано, что система экспонент $e_k(x) = e^{ikx}$ ($k \in \mathbf{Z}$) является полной и замкнутой системой в евклидовом пространстве непрерывных периодических с периодом 2π функций.

3.5. Замечания по поводу сходимости

Следует заметить, что ряд Фурье просто непрерывной (периодической) функции, не обладающей каким-либо дополнительным свойством гладкости, может расходиться в бесконечном (даже – несчетном) множестве точек, см. [1]. Если функцию

еще ухудшить, но так, что она останется интегрируемой по Лебегу, ряд Фурье вообще может расходиться всюду, см. [5]. Эти примеры говорят о том, что вопрос о поточечной сходимости рядов Фурье является достаточно сложным. Тем не менее, отметим, что если функция непрерывна и имеет на периоде ограниченную вариацию (то есть является разностью двух монотонных функций), то поточечная сходимость имеет место.

Со сходимостью в среднеквадратичном дела обстоят намного лучше. Например, если функция $f(x)$ интегрируема и интеграл

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

существует как несобственный с конечным числом особенностей, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к ней в среднеквадратичном смысле. Принципиальным здесь является тот факт, что любую такую функцию с любой степенью точности можно в среднеквадратичном аппроксимировать (приблизить) непрерывной функцией. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и $g(x)$ – непрерывная периодическая с периодом 2π функция, являющаяся аппроксимацией функции $f(x)$ в среднеквадратичном, так что $\|f - g\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем достаточно длинный отрезок ряда Фурье функции $g(x)$ так, чтобы выполнялось нера-

венство $\left\| g - \sum_{k=-n}^n c_k(g) e_k \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \right\| \leq \left\| f - \sum_{k=-n}^n c_k(g) e_k \right\| \leq \|f - g\| + \left\| g - \sum_{k=-n}^n c_k(g) e_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Может все-таки вызвать некоторый интерес следующий вопрос. Пусть функция гладкая, за исключением нескольких точек (на периоде), где она имеет скачки. Как ведет себя ряд Фурье в точках разрыва? (В среднеквадратичном ряд, конечно, сходится). Имеет место следующая теорема

Теорема 3.9 (Дирихле). Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируема и периодична с периодом 2π . Тогда ряд Фурье при произвольном x сходится к

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2},$$

т.е. в точке непрерывности ряд Фурье сходится к значению функции, а в точках разрыва – к полусумме левого и правого предельных значений.

Напомним, что кусочная непрерывность 2π -периодической функции означает, что на периоде функция имеет лишь конечное число разрывов первого рода (скачков). Кусочно-непрерывная дифференцируемость будет, таким образом, означать, что производная функции имеет на периоде не более чем конечное число скачков (при этом непрерывность самой функции, вообще говоря, не предполагается и при необходимости должна оговариваться отдельно).

В точках разрыва функции $f(x)$ ряд Фурье сходится к функции очень неравномерно. Именно если x_0 – точка разрыва первого рода функции $f(x)$ и для определенности $f(x-0) > f(x+0)$, то

$$\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0 - 0}} s_n(x) > f(x_0 - 0) \text{ и } \underline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \rightarrow x_0 + 0}} s_n(x) < f(x_0 + 0),$$

где $s_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{e}_k$ – частичная сумма ряда Фурье. Последнее

означает, что предельное колебание частичной суммы Фурье больше, чем скачок самой функции в точке разрыва. Такое поведение суммы Фурье в точках разрыва носит название явления эффекта Гиббса, см. рис. 4.2.

3.6. Интегрирование и дифференцирование рядов Фурье

Вопрос об интегрировании рядов Фурье удобно начать с некоторого обобщения равенства Парсеваля.

Теорема 3.10. Пусть $f(x), g(x) \in C_{2\pi}$. Тогда

$$(f, g) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \overline{c_k(g)} = c_0(f) \overline{c_0(g)} + \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k(f) \overline{c_k(g)} + c_{-k}(f) \overline{c_{-k}(g)}),$$

где

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Доказательство. Теорема вытекает из уравнения замкнутости. Действительно, пусть $s_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - s_n\| = 0$. Но

$$(s_n, g) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) \overline{c_k(g)}.$$

И в силу неравенства Буняковского

$$\left| (f, g) - \sum_{k=-n}^n c_k(f) \overline{c_k(g)} \right| = |(f - s_n, g)| \leq \|f - s_n\| \cdot \|g\|.$$

При переходе к пределу получим ноль.

Теорема остается верной для значительно более широкого класса функций $f(x)$ и $g(x)$, лишь бы для них выполнялись условия замкнутости (равенства Парсеваля), см. п. 2.7. Для наших целей достаточно того, что теорема остается верной для периодической функции $g(x)$, определенной при $x \in [0, 2\pi]$ равенствами

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (\alpha, \beta) \subset [0, 2\pi], \\ 0 & \text{при } x \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$$

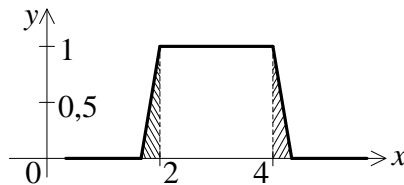


Рис. 3.2. Аппроксимация кусочно-непрерывной функции непрерывной

Такая функция элементарно аппроксимируется в среднеквадратичном смысле непрерывной функцией, см. рис. 3.2.

Например, отличие в среднеквадратичном функции $g(x)$ от аппроксимации на рис. 3.2, не превосходит $\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$, где S — суммарная площадь заштрихованных треугольников. Эта величина может быть сделана сколь угодно малой и тогда, как было показано в п. 2.7, ряд Фурье функции $g(x)$ сходится к ней в среднеквадратичном, следовательно, теорема 3.10 остается верной и для такой функции $g(x)$.

Запишем утверждение теоремы 3.10 для произвольной непрерывной периодической с периодом 2π функции $f(x)$ и функции $g(x)$, определенной выше. Тогда ввиду

$$\overline{c_k(g)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} e^{ikx} dx$$

находим

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \overline{c_k(g)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) \int_{\alpha}^{\beta} e^{ikx} dx.$$

Но это в точности означает возможность интегрировать почленно ряд Фурье функции $f(x)$. Заметим, что исходный ряд Фурье не сходится, вообще говоря, равномерно, и теорема об интегрировании из общей теории рядов не применима. Заметим также, что проинтегрированный ряд сходится равномерно относительно α и β , поскольку имеет сходящийся мажорантный ряд:

$$2\pi |c_0(f)| + 2 \sum_{k \neq 0} \frac{|c_k(f)|}{k}.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3.11. Ряд Фурье непрерывной периодической с периодом 2π функции можно интегрировать почленно, причем проинтегрированный ряд сходится равномерно относительно пределов интегрирования (считая, что последние изменяются на интервале длиной в период).

Перейдем теперь к вопросу о дифференцировании. Как было показано в ходе доказательства теоремы Дирихле о равномерной сходимости (с помощью формулы интегрирования по частям), если $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая периодическая с периодом 2π функция, то

$$c_k(f') = i \cdot k \cdot c_k(f), \quad (3.8)$$

что соответствует возможности почленного дифференцирования ряда Фурье такой функции $f(x)$ с получением ряда Фурье (сходящегося, вообще говоря, лишь в среднеквадратичном) ее производной. В силу леммы Римана-Лебега из этого соотношения вытекает оценка скорости убывания при $n \rightarrow \infty$ коэффициентов Фурье функции класса $C_{2\pi}^1$ (т.е. непрерывно дифференцируемой, периодической):

$$c_k(f) = o\left(\frac{1}{k}\right),$$

т.е. быстрее, чем $\frac{1}{n}$. Если функция $f(x)$ m раз непрерывно дифференцируема, то, применяя k раз формулу (3.8), получаем

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f),$$

откуда вытекает оценка

$$c_k(f) = o\left(\frac{1}{k^m}\right)$$

для коэффициентов Фурье m раз непрерывно дифференцируемой периодической с периодом 2π функции.

Из этих оценок и из теоремы о дифференцировании общих функциональных рядов вытекает, что ряд Фурье m раз непрерывно дифференцируемой периодической функции можно почленно дифференцировать $(m-1)$ раз с сохранением равномерной сходимости ряда. m -е дифференцирование будет приводить к ряду Фурье m -й производной, но сходимость ряда надо понимать уже в среднеквадратичном.

Верно и обратное наблюдение: если коэффициенты Фурье некоторой функции убывают достаточно быстро, такая функция будет достаточно гладкой. Именно, верна

Теорема 3.12. Пусть коэффициенты Фурье некоторой (периодической с периодом 2π) функции $f(x)$ удовлетворяют оценке:

$$c_k(f) = \frac{v_k}{k^m} \quad (k \neq 0), \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |v_k|^2 < \infty.$$

Тогда функция $f(x)$ $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема.

Доказательство. Действительно, тригонометрический ряд, полученный в результате формального почленного дифференцирования $(m-1)$ раз, имеет коэффициенты

$$(ik)^{m-1} c_k(f) = i^{m-1} \frac{v_k}{k},$$

и, следовательно, абсолютно сходится, что оправдывает возможность дифференцирования почленно данное количество раз.

3.7. Ряды Фурье периодических функций с периодом $T = 2l$

Все предыдущие рассуждения справедливы и для периодических функций с произвольным периодом $T = 2l$. Однако можно получить соответствующую общую теорию как следствие частного случая $T = 2\pi$, используя растяжение (сжатие) вещественной оси. Действительно, если $f(x)$ – периодическая функция с периодом $T = 2l$, то функция $g(x)$, определенная равенством $g(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$, будет периодической функцией с

периодом $T = 2\pi$. При этом $f(x) = g\left(\frac{\pi x}{l}\right)$.

Пусть теперь $f(x)$ и $g(x)$ – периодические функции с периодом $2l$. Обозначим через $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ соответствующие им периодические функции с периодом 2π , т.е.

$$\tilde{f}(x) = f\left(\frac{lx}{\pi}\right) \text{ и } \tilde{g}(x) = g\left(\frac{lx}{\pi}\right).$$

Тогда

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(x) \overline{\tilde{g}(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{lx}{\pi}\right) \overline{g\left(\frac{lx}{\pi}\right)} dx = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Последний интеграл – скалярное произведение периодических функций $f(x)$ и $g(x)$ с периодом $2l$:

$$(f, g) = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$$

(функции считаются непрерывными, для определенности). Ортонормированная система функций \mathbf{e}_k примет вид

$$\mathbf{e}_k = e_k(x) = e^{i \frac{\pi k x}{l}}. \quad (3.9)$$

Возьмем непрерывную периодическую с периодом $2l$ функцию $f(x)$. Перейдем к функции $\tilde{f}(x)$ (непрерывной и периодической с периодом 2π) и построим для нее ряд Фурье относительно ортонормированной системы e^{ikx} на интервале $[0, 2\pi]$. Этот ряд будет рядом Фурье для функции $f(x)$ относительно ортонормированной системы (3.9) на интервале $[0, 2l]$:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{\pi k x}{l}}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad c_k = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f(x) e^{-i \frac{\pi k x}{l}} dx.$$

Вещественная форма ряда Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{l} + b_k \sin \frac{\pi k x}{l} \right), \quad x \in \mathbf{R},$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Равенство Парсеваля не изменит своего вида, если учесть, что теперь

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2l} \int_0^{2l} |f(x)|^2 dx.$$

Формулы перехода от комплексной к вещественной форме и обратно изменению не подвергаются.

3.8. Разложение четных и нечетных функций

Здесь следует использовать вещественную форму ряда Фурье, записав соотношения для коэффициентов Фурье в симметричной форме:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Напомним, что если функция $f(x)$ – нечетная (и интегрируемая), то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad (\forall a > 0).$$

Если функция $f(x)$ – четная (и интегрируемая), то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (\forall a > 0).$$

Пусть функция $f(x)$ – непрерывная, периодическая с периодом $2l$ и четная. Тогда $b_k = 0$ при всех натуральных k и ряд Фурье такой функции будет содержать только косинусы:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k x}{l}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Пусть функция $f(x)$ – непрерывная, периодическая с периодом $2l$ и нечетная. Тогда $a_k = 0$ при всех натуральных k и

при $k = 0$ и ряд Фурье такой функции будет содержать только синусы:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{\pi k x}{l}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть на интервале $[0, l]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Как можно разложить ее в ряд Фурье на этом интервале? Возможны разные приемы. Можно, например, продолжить ее периодически на всю ось с периодом $T = l$ и воспользоваться общей теорией. Однако, можно предварительно продолжить ее как четную или нечетную на интервал $[-l, l]$ и затем уже продолжать периодически на всю ось с периодом $T = 2l$. В этом случае в зависимости от способа продолжения мы получим разложение в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам. Следует заметить, что для вычисления коэффициентов Фурье нет необходимости явно строить описанные продолжения. Действительно, в случае четного продолжения мы можем найти коэффициенты a_k по формулам

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx \quad \text{и} \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k \in \mathbf{N},$$

а в случае нечетного продолжения мы можем найти коэффициенты b_k по формулам

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Следует заметить, что скорости сходимости этих рядов будут в общем случае различны. При четном продолжении функция останется непрерывной. При нечетном она (в общем случае) получит точки разрыва (1-го рода) в нуле и при $x = l$ (и далее периодически с периодом $2l$). В последнем случае ряд будет сходиться заведомо медленно.

3.9. Вещественная форма тригонометрического ряда Фурье

До сих пор мы получали сведения о вещественной форме тригонометрического ряда Фурье благодаря формулам перехода (3.3). Следует, однако, заметить, что функции

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

образуют ортонормированную систему относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

в пространстве непрерывных периодических с периодом 2π функций и коэффициенты a_k и b_k являются коэффициентами Фурье относительно этой ортонормированной системы (кроме a_0 , который становится коэффициентом Фурье в этом смысле после деления на множитель $\sqrt{2}$). Равенство Парсеваля может быть переписано в виде

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

В случае периодических функций с периодом $2l$ полной ортонормированной системой будет

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots$$

относительно скалярного произведения

$$(f, g) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \overline{g(x)} dx.$$

3.10. Улучшение скорости сходимости ряда Фурье

Тригонометрические ряды Фурье, возникающие в результате решения конкретных прикладных задач, могут оказаться медленно сходящимися, что часто препятствует их использованию (если сумма ряда не находится в замкнутом виде). Если оказывается возможным из данного медленно сходящегося ряда вы-

делить медленно сходящуюся часть с известной суммой так, что оставшаяся часть ряда сходится уже быстро, то такое выделение и называется улучшением сходимости ряда Фурье.

Если особенности (разрывы) функции $f(x)$, улучшением сходимости ряда Фурье которой мы интересуемся, известны, то функцию $f(x)$ можно легко представить как сумму достаточно простой (например, кусочно-линейной) функции с точно такими же особенностями, что и $f(x)$, и функции, которая уже особенностей не имеет (но может иметь особенности производной).

Если особенности функции $f(x)$ не известны, для улучшения сходимости ряда Фурье можно воспользоваться методом А.Н.Крылова. Идея метода состоит в том, чтобы выделить из коэффициентов Фурье младшие степени величины и попытаться суммировать полученные ряды с помощью таблиц известных разложений.

Например, пусть требуется улучшить сходимость ряда

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^3}{k^4 - 1} \sin kx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Заметим, что тождественно выполняется $\frac{k^3}{k^4 - 1} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^5 - k}$. Но известно, что при $x \in (-\pi, \pi)$ $\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$, откуда получаем искомое представление ряда Фурье:

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^5 - k} \sin kx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

4. Применение ряда Фурье

Пример 4.1. Найти разложение функции $f(x)$, заданной на интервале $(0, 2\pi)$ равенством $f(x) = x$ и далее продолженной периодически на всю ось.

Решение. Эта функция кусочно-непрерывно дифференцируема. Именно в точках $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ она имеет разрывы-скачки, в остальных точках она бесконечно дифференцируема. Как мы уже знаем, ряд Фурье будет сходиться к этой функции в каждой точке $x \neq 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, никакой равномерной сходимости при этом нет: функция разрывная.

Найдем коэффициенты Фурье этой функции. Воспользуемся формулами (3.1):

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \pi, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x e^{-ikx} dx = -\frac{1}{ik}, k \neq 0.$$

Тригонометрический ряд Фурье в комплексной и вещественной формах принимает вид

$$f(x) = \pi - \sum_{k \neq 0} \frac{e^{ikx}}{ik} = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, x \neq 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

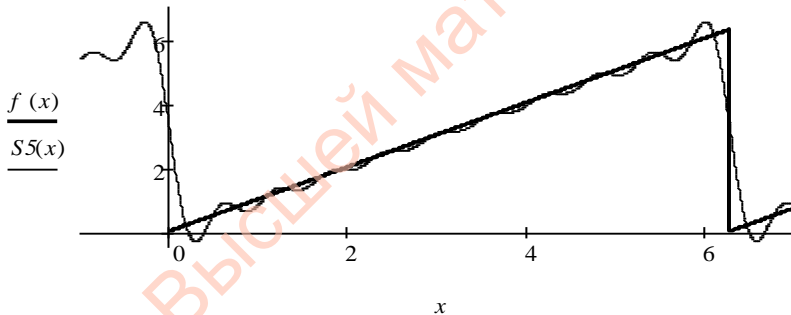


Рис. 4.1. Функция и ее частичная сумма S_5 ряда Фурье

Наи рис. 4.1. изображены графики периодической функции $f(x) = x$ с периодом 2π и ее частичной суммы

$$S_5(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^5 \frac{\sin kx}{k}.$$

В силу сказанного выше в точках непрерывности функции $f(x)$ ряд сходится к значению функции. В точках же разрыва $x = 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$, будет наблюдаться явление Гиббса и ряд Фурье

должен сходиться в этих точках к полусумме левых и правых предельных значений функции: $\frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \pi$. Если

подставить значение $x = 0$ непосредственно в ряд, то получим:

$$\pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \Big|_{x=0} = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k0}{k} = \pi.$$

Запишем равенство Парсеваля. Квадрат нормы функции равен $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{4\pi^2}{3}$. Сумма квадратов коэффициентов

ряда Фурье равна $\pi^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4\pi^2}{3}$. Откуда с учетом тожде-

ства $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ получаем $\frac{4\pi^2}{3} = \pi^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ или $\frac{4\pi^2}{3} = \frac{4\pi^2}{3}$. Равенство Парсеваля справедливо.

Пример 4.2. Найти разложение функции $f(x) = \pi^2 - x^2$ в ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$.

Решение. Коэффициенты ряда Фурье для данной функции могут быть вычислены по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx,$$

где $k \in \mathbf{N}$, $l = \pi$. Тогда получим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi^2,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos kx dx = -\frac{4(-1)^k}{k^2},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) \sin kx dx = 0.$$

Значит, ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ будет иметь вид:

$$\pi^2 - x^2 \sim \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

Можно отметить, что в силу четности данной функции коэффициенты $b_k = 0$, т.е. полученный ряд Фурье является рядом Фурье по косинусам на $[0, \pi]$.

4.1. Эффект Гиббса

Под эффектом Гиббса понимается отсутствие поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье в точках разрыва функции. Рассмотрим этот вопрос более внимательно. Пусть кусочно-непрерывная функция $f(x)$ имеет разрыв первого рода в точке $x = a$: левое предельное значение в этой точке равно A , а правое – B , $A \neq B$. С помощью функции Хевисайда

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{справедливо соотношение}$$

$$f(x) = (B - A) \cdot \left(h(x - a) - \frac{1}{2} \right) + f_1(x),$$

где $f_1(x)$ – непрерывная в точке $x = a$ функция и

$f_1(a) = \frac{A+B}{2}$. Первое слагаемое – кусочно-постоянная функция. Ее тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ имеет вид

$$H(x) = (B - A) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)(x-a)}{2k-1} \right). \quad (4.1)$$

Рассмотрим поведение отрезка этого ряда в окрестности точки разрыва $x = a$. Определим новую переменную $t = x - a$. Тогда отрезок ряда (4.1) запишется в виде конечной суммы

$H_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2k-1)t}{2k-1}$. Его производная равна

$H'_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)t = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2nt}{\sin t}$. Следовательно, справедливо интегральное представление отрезка ряда

$H_n(t) = \int_0^t H'_n(s) ds = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2ns}{\sin s} ds$. Экстремумы функции

$H_n(t)$ определяются уравнением $\sin 2nt = 0$ или $t = \frac{k\pi}{2n}$. Ближайшие к точке разрыва функции экстремумы ($k = \pm 1$) имеют

координаты $x_0 = a \pm \frac{\pi}{2n}$. Значение отрезка ряда в точке экстремума равно

$$H_n\left(a - \frac{\pi}{2n}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2ns}{\sin s} ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin z}{2n \sin \frac{z}{2n}} dz.$$

Предел экстремального значения отрезка ряда:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} H_n\left(a - \frac{\pi}{2n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin z}{2n \sin \frac{z}{2n}} dz \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin z}{2n \frac{z}{2n}} dz = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{2}{\pi} \text{Si } \pi = 1,179. \end{aligned}$$

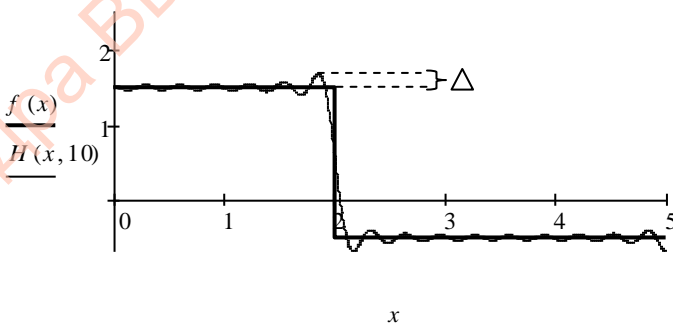


Рис. 4.2. Эффект Гиббса

На рис. 4.2 показано поведение отрезка ряда Фурье (а точнее его частичная сумма $H_{10}(x)$) для функции $f(x)$ в окрестности точки разрыва, этот экстремум и его относительная величина Δ .

4.2. Периодические решения

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n y(x) = q(x) \quad (4.2)$$

с постоянными коэффициентами и периодической правой частью $q(x)$ периода 2π . Существует ли периодическое решение с периодом 2π ? Будем искать решение в форме ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k e^{ikx}.$$

Разложим правую часть уравнения в ряд Фурье

$$q(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k e^{ikx},$$

тогда при всех $k \in \mathbf{Z}$

$$p_0 (ik)^n y_k + p_1 (ik)^{n-1} y_k + \dots + p_n y_k = q_k$$

(равенство коэффициентов Фурье левой и правой частей уравнения). Полагая

$$P(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n z,$$

получаем соотношение [Фурье-образ уравнения (4.2)]

$$P(ik) y_k = q_k \quad (k \in \mathbf{Z}). \quad (4.3)$$

Если $P(ik) \neq 0$ ($\forall k \in \mathbf{Z}$), то выполняется

$$y_k = \frac{q_k}{P(ik)}, \quad P(ik) \neq 0 \quad (k \in \mathbf{Z}), \quad (4.4)$$

т.е. мы нашли коэффициенты Фурье функции $y(x)$, а следовательно, и саму эту функцию. Однако, чтобы найденная функция действительно была решением, необходимо оправдать возможность n -кратного дифференцирования суммы ряда Фурье $y(x)$ почленно. В этих целях потребуем непрерывной дифференцируемости правой части $q(x)$. Тогда в силу неравенства [вытекаю-

щего из асимптотики $P(ik) \approx p_0(ik)^n$ ($k \in \mathbf{Z}$) при $k \rightarrow \infty$]

$|P(ik)| \geq c|k|^n$ с некоторым $c > 0$ заключаем, что $|y_k| \leq \frac{|\sigma_k|}{c|k|^{n+1}}$,

где σ_k — коэффициенты Фурье производной $q'(x)$. Последняя оценка позволяет нам сослаться на теорему 3.12 о дифференцируемости ряда Фурье, из которой и вытекает n -кратная непрерывная дифференцируемость функции $y(x)$.

Заметим теперь, что построенное решение будет единственным. Действительно, иначе существовало бы нетривиальное 2π -периодическое решение однородного уравнения

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0.$$

Как известно, общее решение последнего уравнения выражается через экспоненты $e^{\lambda x}$, где λ — корни характеристического уравнения $P(z) = 0$, и эти экспоненты могут привести к 2π -периодическому решению только при $\lambda = ik$ ($k \in \mathbf{Z}$) в противоречии с условием (4.4).

Итак, при непрерывно дифференцируемой правой части условие (4.4) является условием существования и единственности 2π -периодического решения рассматриваемого дифференциального уравнения (4.2).

Если при некотором целом m выполняется $P(im) = 0$, то уравнение (4.2) будет иметь 2π -периодические решения только при условии, что соответствующий коэффициент Фурье правой части равен нулю: $q_m = 0$. При этом единственность 2π -периодического решения теряется: коэффициент Фурье y_m может быть выбран произвольно (здесь также используется тот факт, что экспонента e^{imx} является решением однородного уравнения).

Наконец, если при некотором целом m одновременно $P(im) = 0$ и $q_m \neq 0$, то периодического решения не существует.

Пример 4.3. Найти периодические решения дифферен-

циального уравнения $y'' - 4y' + 4y = \pi^2 - x^2$ на $[-\pi, \pi]$.

Решение. Правая часть уравнения разлагается в ряд Фурье следующего вида (см. пример 4.2):

$$\pi^2 - x^2 \sim \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx.$$

Периодические решения данного дифференциального уравнения на $[-\pi, \pi]$ будем искать в виде:

$$y = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Тогда после дифференцирования получим:

$$y' = \sum_{k=1}^{+\infty} (-kA_k \sin kx + kB_k \cos kx),$$

$$y'' = \sum_{k=1}^{+\infty} (-k^2 A_k \cos kx - k^2 B_k \sin kx).$$

Подставим выражения для y , y' и y'' , а также $\pi^2 - x^2$ в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} 2A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (\cos kx \cdot (-k^2 A_k - 4kB_k + 4A_k) + \sin kx \cdot (-k^2 B_k + 4kA_k + 4B_k)) &= \\ &= \frac{2}{3}\pi^2 - 4\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx \end{aligned}$$

Последнее равенство будет выполняться, если будут равны коэффициенты при соответствующих функциях, т.е.

$$\begin{cases} 2A_0 = \frac{2}{3}\pi^2, \\ -k^2 A_k - 4kB_k + 4A_k = -\frac{4(-1)^k}{k^2}, \\ -k^2 B_k + 4kA_k + 4B_k = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = \frac{\pi^2}{3}, \\ A_k = \frac{4(-1)^k(k^2 - 4)}{k^2(k^2 + 4)^2}, \\ B_k = \frac{16(-1)^k}{k(k^2 + 4)^2}. \end{cases}$$

Поэтому окончательно периодическое решение исходного

дифференциального уравнения записывается так:

$$y(x) = \frac{\pi^2}{6} + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{(k^2 - 4) \cos kx + 4k \sin kx}{k^2(k^2 + 4)^2}.$$

4.3. Задача о колебаниях закрепленной струны

Рассмотрим струну, закрепленную в точках 0 и π . Если придать струне произвольную начальную форму, заданную, например, функцией $\varphi(x)$, и затем отпустить, струна начнет колебаться. Требуется найти форму струны в произвольный последующий момент времени. В математической физике выводится следующее (волновое) уравнение для функции $u(x, t)$, описывающей форму струны (отклонение от положения равновесия) в момент времени t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.5)$$

где a – некоторая положительная константа. Уравнение (4.5) будем рассматриваться с начальными условиями

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Первое равенство системы – начальная форма струны, второе – начальная скорость. Имеются также граничные условия

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Будем искать решение в виде ряда Фурье по синусам

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin kx,$$

что сразу позволяет удовлетворить всем граничным условиям. Вычисляя формально коэффициенты Фурье левой и правой частей волнового уравнения (4.5), приходим к равенствам

$$b_k''(t) = -a^2 k^2 b_k(t) \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Начальные условия будут выполнены, если

$$\begin{cases} b_k(0) = \varphi_k, \\ b'(0) = 0, \end{cases}$$

где φ_k – коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$:

$$\varphi_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(x) \sin kx dx.$$

Решение задачи Коши для функций $b_k(t)$ имеет вид $b_k(t) = \varphi_k \cos(akt)$, что позволяет записать решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos(akt) \sin kx. \quad (4.6)$$

Однако чтобы полученная функция $u(x, t)$ была действительно решением, надо обеспечить возможность дважды непрерывно дифференцировать ряд (4.6) как по t , так и по x почленно. Например, достаточно потребовать сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k| k^2.$$

Последний ряд заведомо сходится, если функция $\varphi(x)$, например, трижды непрерывно дифференцируема на $[0, \pi]$ и $\varphi''(0) = \varphi''(\pi) = 0$. В этом случае выполняется

$$\varphi_k = -\frac{2}{\pi k^3} \int_0^{\pi} \varphi'''(x) \cos nkx dx,$$

т.е. $\varphi_k k^2 = \frac{\sigma_k}{k}$, где ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\sigma_k|^2$ сходится.

Заметим далее, что $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin kx$ и

$$\cos(akt) \sin kx = \frac{\sin n(x - at) + \sin n(x + at)}{2}.$$

$$\text{Отсюда } u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}.$$

Найденное решение имеет вид суперпозиции двух разбегающихся со скоростью a волн. Отметим, что в последнем представлении решения функция $\varphi(x)$ должна пониматься как продолженная на всю числовую ось. Первоначально функция $\varphi(x)$ задана на интервале $[0, \pi]$. В ходе решения она фактически была продолжена сначала как нечетная на интервал $[-\pi, \pi]$ и далее периодически с периодом 2π .

Более общие примеры и метод Фурье разделения переменных, позволяющий рассматривать более общие постановки задач, будут рассмотрены в курсе математической физики или на семинарских занятиях.

Пример 4.4. Найти решение краевой задачи для свободных колебаний ограниченной струны:

$$u''_{tt} = \frac{9}{4} u''_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < +\infty,$$

начальные условия $u(x, 0) = 0, \quad u'_t(x, 0) = x(x-1),$

граничные условия $u(0, t) = u(1, t) = 0.$

Решение. Исходя из граничных условий решение задачи $u(x, t)$ будем искать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \sin \pi k x.$$

Подробное объяснение выбора вида функции $u(x, t)$ будет приведено позднее (см. пример 5.1).

Неизвестную функцию $b_k(t)$ найдем, подставив функцию $u(x, t)$ в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \sin \pi k x \right)''_{tt} &= \frac{9}{4} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \sin \pi k x \right)''_{xx} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} b_k''(t) \sin \pi k x &= \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} b_k(t) \cdot (-\pi^2 k^2) \sin \pi k x \Rightarrow \\ \Rightarrow b_k''(t) &= \frac{9}{4} b_k(t) \cdot (-\pi^2 k^2) \Rightarrow b_k''(t) + \frac{9}{4} \pi^2 k^2 b_k(t) = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение есть ЛОДУ 2-го порядка. По корням характеристического уравнения найдем его решение:

$$b_k(t) = A_k \cos \frac{3}{2} \pi k t + B_k \sin \frac{3}{2} \pi k t.$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cos \frac{3}{2} \pi k t + B_k \sin \frac{3}{2} \pi k t \right) \sin \pi k x.$$

Коэффициенты A_k и B_k найдем из начальных условий:

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos 0 + B_k \sin 0) \sin \pi k x = 0 \Rightarrow A_k = 0,$$

$$\begin{aligned} u'_t(x, 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{3}{2} \pi k A_k \sin 0 + \frac{3}{2} \pi k B_k \cos 0 \right) \sin \pi k x = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2} \pi k B_k \right) \sin \pi k x = x(x-1). \end{aligned}$$

Откуда следует, что числа $\frac{3}{2} \pi k B_k$ являются коэффициентами ряда Фурье по синусам функции $x(x-1)$ на $[0; 1]$, поэтому:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \pi k B_k &= 2 \int_0^1 x(x-1) dx = 4 \frac{(-1)^k - 1}{\pi^3 k^3} \Rightarrow \\ B_k &= \frac{8((-1)^k - 1)}{3\pi^4 k^4}. \end{aligned}$$

В итоге решение исходной задачи примет вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8((-1)^k - 1)}{3\pi^4 k^4} \cdot \sin \frac{3}{2} \pi k t \cdot \sin \pi k x.$$

На рис. 4.3. изображено положение струны в момент времени 0 (начальный момент времени), т.е. $u(x, 0)$, затем в момент времени 0,1, т.е. $u(x; 0,1)$, а также в моменты времени 0,5, 0,7 и 1 соответственно $u(x; 0,5)$, $u(x; 0,7)$ и $u(x; 1)$.

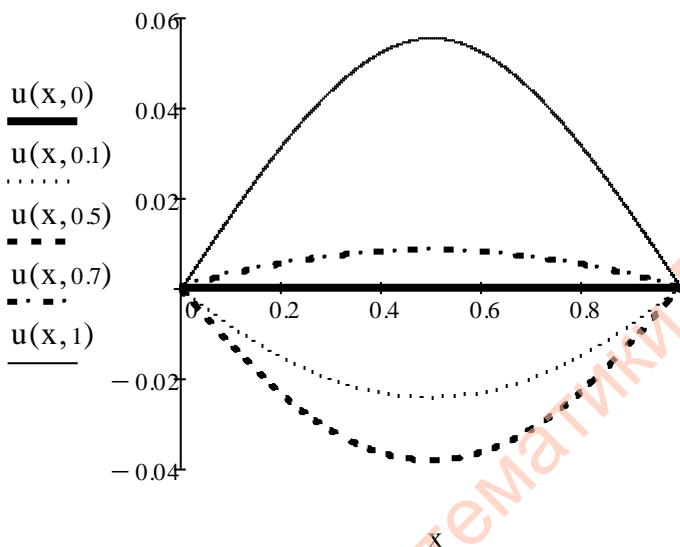


Рис. 4.3. Положение струны в различные моменты времени

5. Нетригонометрические ряды Фурье

5.1. Краевые задачи теории дифференциальных уравнений

Основной задачей в теории дифференциальных уравнений является задача Коши. В физических приложениях же на первый план выступают так называемые краевые задачи. Мы остановимся на краевых задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В достаточно общей форме такая задача ставится следующим образом.

На отрезке $[a, b]$ отыскать решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \quad (5.1)$$

удовлетворяющего краевым (или граничным) условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_2 y'(a) = c_1, \\ \beta_0 y(b) + \beta_2 y'(b) = c_2. \end{cases} \quad (5.2)$$

Функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ и $f(x)$ будут предполагаться непрерывными. Если $c_1 = c_2 = 0$, краевые условия называются однородными. Мы ограничимся именно этим случаем. Последнее ограничение позволяет нам рассматривать множество непрерывно дифференцируемых¹ на отрезке $[a, b]$ функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям, как линейное пространство. Обозначим это пространство функций через \mathbf{V}_1 . Подпространство дважды непрерывно дифференцируемых функций из \mathbf{V}_1 обозначим через \mathbf{V}_2 . Тогда краевая задача примет вид: найти $y(x) \in \mathbf{V}_2$ такие, что

$$L(y) = f, \quad (5.3)$$

где L – линейный оператор, определенный на функциях из пространства \mathbf{V}_2 ² равенством

$$L(y) = p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y.$$

Естественно возникают вопросы: какова область значений оператора L , т.е. при каких $f(x)$ уравнение (5.3) имеет решение? Единственно ли решение, если задача разрешима? Для ответа на эти вопросы нужно изучить спектральные свойства оператора L . Последнее означает, что нужно изучить разрешимость задачи на собственные функции и собственные значения оператора L , т.е. найти все пары (λ, y) , где $\lambda \in \mathbf{C}$ и $y(x) \in \mathbf{V}_2$, $y \neq 0$, такие, что

$$L(y) = \lambda y.$$

Задача на собственные функции и собственные значения операторов порождает различные ортонормированные (в определенном смысле) системы — системы собственных функций. Если задача на собственные функции и собственные значения оператора L решена и привела к полной ортонормированной системе (в каком-то смысле) собственных функций

¹ В случае условий Дирихле вместо непрерывной дифференцируемости можно ограничиться просто непрерывностью.

² Значения оператора L , конечно, уже не лежат в \mathbf{V}_2 .

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, причем среди собственных значений λ_k нет равного нулю, решение краевой задачи формально строится элементарно. Действительно, разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье относительно ортонормированной системы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) \varphi_k(x).$$

Будем искать решение $y(x)$ краевой задачи также в виде ряда Фурье

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) \varphi_k(x).$$

Считая, например, что скорость сходимости этого ряда позволяет вынести оператор L за знак суммы (свойство линейности)

$$L(y(x)) = L\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) \varphi_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(y) L(\varphi_k(x)),$$

находим, что уравнение (5.3), с учетом $L(\varphi_k(x)) = \lambda_k \varphi_k(x)$, примет вид

$$\lambda_k c_k(y) = c_k(f), \quad k = 1, 2, \dots$$

Откуда

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)}{\lambda_k} \varphi_k(x).$$

Вопрос о сходимости ряда и принадлежности построенной функции $y(x)$ пространству V_2 должен рассматриваться отдельно.

5.2. *Нормальная форма краевой задачи*

При исследовании краевой задачи удобно переписать дифференциальное уравнение на собственные значения в симметричном виде. Именно, домножим уравнение

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y$$

на функцию $\rho(x)$ такую, чтобы уравнение приняло вид

$$-(py')' + qy = \lambda \rho y.$$

Очевидно, функция $\rho(x)$ находится из уравнения

$$p_1 \rho = (p_2 \rho)',$$

при этом $p = -p_2 \rho$. Таким образом, если $p_2(x)$ не обращается в ноль, найдем

$$p(x) = Ce^{\int \frac{p_1}{p_2} dx}, \quad \rho = -\frac{p}{p_2}.$$

Оператор L , формально определенный равенством

$$L(y) = \frac{-(py')' + qy}{\rho}, \quad (5.4)$$

называется оператором Штурма-Лиувилля. Краевая задача на собственные числа и собственные функции (λ, y) оператора L

$$-(py')' + qy = \lambda \rho y \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_0 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

называется задачей Штурма-Лиувилля, при этом предполагается, что $p(x), q(x)$ и $\rho(x)$ – вещественные непрерывные функции, причем $p(x)$ – непрерывно дифференцируема и неотрицательна, а и $\rho(x)$ – неотрицательны. Пары коэффициентов α_1, α_2 и β_1, β_2 считаются вещественными и одновременно в ноль необращающимися.

Краевые условия

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \quad (5.7)$$

называются краевыми условиями первого рода или условиями Дирихле. Краевые условия

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0 \quad (5.8)$$

называются краевыми условиями второго рода или условиями Неймана.

Дифференциальное уравнение задачи Штурма - Лиувилля может быть подвергнуто дальнейшей редукции. Если ввести независимую переменную t равенством

$$t = \int \frac{dx}{p(x)}$$

(считая, что $p(x) \neq 0$), то ввиду равенств $\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{d}{dx} = p \frac{d}{dx}$

дифференциальное уравнение примет вид

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} + pqy = \lambda ppy.$$

Положим теперь $y = k(t)u(s)$, $s = \int \frac{dt}{k^2(t)}$, где $k(t)$ – пока

неопределенная функция, а s и u соответственно новые независимая переменная и искомая функция. При этом

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dk}{dt}u + k \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dk}{dt}u + \frac{1}{k} \frac{du}{ds},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 k}{dt^2}u + \frac{dk}{dt} \frac{du}{ds} \frac{ds}{dt} - \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dt} \frac{du}{ds} + \frac{1}{k} \frac{d^2 u}{ds^2} \frac{ds}{dt} = \frac{d^2 k}{dt^2}u + \frac{1}{k^3} \frac{d^2 u}{ds^2},$$

откуда приходим к дифференциальному уравнению

$$-\frac{1}{k^3} \frac{d^2 u}{ds^2} + \left(pqk - \frac{d^2 k}{dt^2} \right) u = \lambda p p k u.$$

Определим функцию $k(t)$ равенствами

$$p p k^4 = 1 \text{ и } r = p q k^4 - k^3 \frac{d^2 k}{dt^2},$$

получаем уравнение

$$-\frac{d^2 u}{ds^2} + ru = \lambda u.$$

При описанной замене краевые условия сохранят вид однородных краевых условий (с новыми коэффициентами).

5.3. Регулярная задача Штурма - Лиувилля

Оператор L (5.4) называется регулярным оператором Штурма-Лиувилля, если $p(x) > 0$ и $\rho(x) > 0$. Задача (5.5)-(5.6) называется регулярной, если L – регулярный оператор Штурма-Лиувилля. Отметим некоторые свойства решений регулярной задачи Штурма-Лиувилля.

Свойство 5.1. Корни собственных функций просты.

Действительно, если $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0$, то в силу единственности решения задачи Коши $y(x) \equiv 0$.

Свойство 5.2. Каждому собственному значению отвечает единственная с точностью до множителя собственная функция (т.е. собственные числа оператора Штурма-Лиувилля – простые).

Действительно, пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – собственные функции, отвечающие собственному значению λ . Заметим, что однородная система (относительно переменных α_0 и α_1)

$$\begin{cases} \alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) = 0, \\ \beta_0 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение, что возможно только, если определитель системы равен нулю. Это означает, что определитель Вронского решений

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

равен нулю (в точке a и, следовательно, равен нулю тождественно), откуда и вытекает линейная зависимость решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Свойство 5.3. Собственные значения задачи Штурма-Лиувилля вещественны, а соответствующие им собственные функции могут быть выбраны вещественными.

Для доказательства заметим, сначала, что интегрирование по частям два раза приводит к равенству

$$\int_a^b (qf - (pf)') \bar{g} dx = pW(f, \bar{g}) \Big|_a^b + \int_a^b f (q\bar{g} - (p\bar{g})') \bar{g} dx$$

Если $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие краевым условиям задачи (т.е. $f, g \in V_2$), то в силу краевых условий определитель Вронского $W(f, \bar{g})$ обращается в ноль в точках a и b ¹.

Введем скалярное произведение и соответствующую норму, полагая

$$(f, g) = \int_a^b f \bar{g} \rho dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (5.9)$$

Тогда полученное выше равенство (при нулевых внеинтегральных членах) примет вид²

$$(L(f), g) = (f, L(g)).$$

Это свойство называется симметричностью оператора L . Если теперь y – собственная функция, отвечающая собственному значению λ , то

$$\lambda \|y\|^2 = (L(y), y) = (y, L(y)) = \bar{\lambda} \|y\|^2,$$

откуда в силу $y \neq 0$ получаем $\lambda = \bar{\lambda}$, т.е. λ – вещественно.

Далее заметим, что в силу линейности уравнения $L(y) = \lambda y$ и вещественности функций $p(x)$, $\rho(x)$ и $q(x)$ отдельно вещественная и мнимая части собственной функции $y(x)$ будут являться решениями этого уравнения³. В дальнейшем мы всегда будем предполагать вещественность собственных функций.

Свойство 5.4. Различным собственным значениям λ_1 и λ_2 отвечают ортогональные собственные функции y_1 и y_2 :

¹ Важна вещественность коэффициентов в краевых условиях.

² Здесь важную роль играет вещественность функций $p(x)$ и $q(x)$.

³ В силу предыдущего свойства эти части, разумеется, пропорциональны.

$$(y_1, y_2) = \int_a^b y_1 y_2 \rho dx = 0.$$

Действительно, $(\lambda_1 - \lambda_2)(y_1, y_2) = (L(y_1), y_2) - (y_1, L(y_2)) = 0$.

Свойство 5.5. Собственные числа образуют бесконечную монотонно возрастающую последовательность, стремящуюся к бесконечности

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Рассмотрим унитарное пространство непрерывных дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям (5.6), определяя скалярное произведение равенством (5.9). Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля y_n будем считать нормированными:

$$\|y_n\|^2 = \int_a^b |y_n(x)|^2 \rho(x) dx = 1.$$

Тогда они образуют ортонормированную систему. Коэффициенты Фурье функции f (из описанного унитарного пространства) относительно такой ортонормированной системы определены соотношением¹

$$c_k(f) = (f, y_k) = \int_a^b f(x) y_k(x) \rho(x) dx.$$

Разложение функции f в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля имеет вид

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) y_k.$$

Можно показать, что системы собственных функций регулярных задач Штурма - Лиувилля полны (замкнуты), так что ряд Фурье сходится к функции в среднеквадратичном смысле.

Пример 5.1. Решить задачу Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(1) = 0,$$

т.е. найти нетривиальное решение $X(x)$ и неизвестный па-

¹ Напомним о предполагаемой вещественности собственных функций.

раметр λ , при котором оно существует.

Решение. Данное уравнение есть ЛОДУ 2-го порядка. Из его характеристического уравнения $k^2 + \lambda = 0$ следует $k^2 = -\lambda$, которое имеет различные решения в зависимости от числа λ . Рассмотрим различные случаи.

1) Пусть $\lambda < 0$, тогда $k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, поэтому $X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Числа C_1 и C_2 найдем из граничных условий $X(0) = X(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} X(0) = C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0, \\ X(1) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_1 (e^{2\sqrt{-\lambda}} - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0. \end{aligned}$$

2) Пусть $\lambda = 0$, тогда $k_{1,2} = 0$, поэтому $X(x) = C_1 + C_2 x$. Числа C_1 и C_2 найдем из граничных условий:

$$\begin{cases} X(0) = C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ X(1) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow X(x) \equiv 0.$$

3) Пусть $\lambda > 0$, тогда $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}i$, поэтому $X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x$. Из граничных условий:

$$\begin{aligned} \begin{cases} X(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \\ X(1) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} + C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \neq 0, \\ \sin \sqrt{\lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi k \Rightarrow \lambda = \pi^2 k^2, k \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Так как $C_1 = 0$, то для каждого собственного числа $\lambda_k = \pi^2 k^2$, $k \in \mathbf{N}$, можно составить собственную функцию с точностью до постоянного множителя C_2 (в силу однородности

исходного уравнения):

$$X_k(x) = \sin \sqrt{\lambda_k} x = \sin \pi k x, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Поэтому ранее в примере 4.4 решение краевой задачи искали в виде ряда Фурье по этим собственным функциям.

5.4. Полнота собственных функций регулярной задачи Штурма-Лиувилля

Ограничимся схемой доказательства полноты, считая, что:

- 1) весовая функция равна единице: $\rho = 1$,
- 2) евклидово пространство \mathbf{V}_1 состоит из вещественных непрерывных функций, удовлетворяющих условиям Дирихле (5.7).

В рассматриваемом случае

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Положим

$$J(y) = (L(y), y) = \int_a^b \left(-(py')' + qy \right) y dx = \int_a^b \left(p(y')^2 + qy^2 \right) y dx.$$

В курсе «Вариационное исчисление» показано, что наименьшее значение квадратичного функционала $J(y)$ при условиях $y(a) = y(b) = 0$ и $\|y\| = 1$ достигается и равно $\min_{y \in V_1} J(y) = \lambda_1 = J(y_1)$, где λ_1 – наименьшее собственное значение рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля и y_1 – соответствующая собственная функция. Более того, имеет место следующее утверждение, известное как вариационный принцип в проблеме собственных значений.

Теорема 5.1. Пусть y_1, y_2, \dots, y_{n-1} – ортонормированная система собственных функций, отвечающих первым $n-1$ собственным числам задачи Штурма-Лиувилля, расположенным в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n-1}$. Тогда наименьшее значение квадратичного функционала $J(y)$

при условиях $y(a) = y(b) = 0$, $\|y\| = 1$ и $y \perp y_k$
 $\forall k = 1, 2, \dots, (n-1)$ достигается, причем $\min_{y \in V_1} J(y) = \lambda_n = J(y_n)$
 , где λ_n – n -е собственное значение рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля и y_n – соответствующая собственная функция.

Воспользуемся этим принципом для доказательства полноты (замкнутости) системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля L в пространстве V_1 . Положим

$$r_n = f - \sum_{k=1}^{n-1} c_k y_k,$$

где $c_k = (f, y_k)$ – коэффициенты Фурье функции f , так что $y_k \perp r_n$ при $k < n$. Тогда

$$(L(r_n), r_n) = (L(f), r_n) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k (L(y_k), r_n) = (L(f), r_n) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \lambda_k (y_k, r_n),$$

и в силу $(y_k, r_n) = 0$ получаем

$$(L(r_n), r_n) = (L(f), r_n).$$

Считая, что $\|r_n\| \neq 0$, полагаем $r_n = \|r_n\| \cdot e_n$, так что $\|e_n\| = 1$, $e_n \perp y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. В силу вариационного принципа находим

$$(L(r_n), r_n) = \|r_n\|^2 (L(e_n), e_n) \geq \|r_n\|^2 \min_{\substack{\|y\|=1 \\ y \perp y_1, y_2, \dots, y_{n-1}}} (L(y), y) = \lambda_n \|r_n\|^2,$$

откуда в силу неравенства Буняковского

$$\lambda_n \|r_n\|^2 \leq (L(f), r_n) \leq \|L(f)\| \cdot \|r_n\|,$$

т.е. ввиду $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ справедливо

$$\|r_n\| \leq \frac{\|L(f)\|}{\lambda_n} \quad \text{или} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n\| = 0.$$

Следуя определению, последнее означает замкнутость системы собственных функций. Вернемся теперь к уравнению

$$L(y) = f.$$

Заметим, что в силу симметричности L

$$c_k(L(y)) = (L(y), y_k) = (y, L(y_k)) = (y, \lambda_k y_k) = \lambda_k (y, y_k) = \lambda_k c_k(y)$$

равенство

$$\lambda_k c_k(y) = c_k(f)$$

является равенством коэффициентов Фурье $L(y)$ и f . Вопрос о том, будет ли функция $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(f)}{\lambda_k} y_k$ действительно являться решением задачи Штурма-Лиувилля, зависит от скорости сходимости этого ряда.

5.5. Теорема Штурма

В этом пункте мы исследуем характер поведения собственных функций оператора Штурма - Лиувилля.

Теорема 5.2 (Штурм). Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения, соответственно уравнений

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y &= 0, \\ y'' + a_2(x)y &= 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $a_1(x)$ и $a_2(x)$ – непрерывные функции, причем

$$a_1(x) \leq a_2(x) \quad (\forall x).$$

Тогда между любыми двумя нулями решения $y_1(x)$ первого уравнения (5.10) находится по крайней мере один ноль решения $y_2(x)$ второго уравнения (5.10):

$$y(x_1) = y(x_2) = 0, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \exists x_3 \in [x_1, x_2]: y_2(x_3) = 0.$$

Доказательство. Умножим равенство $y_1'' + a_1 y_1 = 0$ на y_2 , а равенство $y_2'' + a_2 y_2 = 0$ на y_1 и вычтем первое из второго. Получим

$$(y_1 y_2' - y_2 y_1') + (a_2 - a_1) y_1 y_2 = 0.$$

Пусть x_1 и x_2 – смежные корни решения y_1 . Предположим, что в интервале $[x_1, x_2]$ нет корней решения y_2 . Без ограничения общности (в силу однородности уравнений) можем считать, что y_1 и y_2 неотрицательны на интервале $[x_1, x_2]$.

Проинтегрируем последнее равенство в интервале $[x_1, x_2]$, получим

$$(y_1 y_2' - y_2 y_1') \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} (a_2 - a_1) y_1 y_2 dx = 0,$$

откуда

$$-y_2(x_2) y_1'(x_2) + y_2(x_1) y_1'(x_1) \leq 0.$$

Но в силу простоты корней решения y_1 и из предположения $y_1 \geq 0$ на интервале $[x_1, x_2]$ заключаем, что $y_1'(x_1) > 0$ и $y_1'(x_2) < 0$. По предположению также $y_2 > 0$ в интервале $[x_1, x_2]$, т.е.

$$-y_2(x_2) y_1'(x_2) + y_2(x_1) y_1'(x_1) > 0,$$

получили противоречие доказывающее теорему.

Посмотрим теперь на уравнение на собственные значения оператора Штурма-Лиувилля. Воспользуемся простейшей из нормальных форм:

$$-y'' + ry = \lambda y \text{ или } y'' + (\lambda - r)y = 0.$$

Напомним, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$. Если λ_n такое собственное значение, что $\lambda_n - r \geq k^2$, то соответствующая собственная

функция y_n в каждом интервале длины $\frac{\pi}{k}$ будет иметь хотя бы

один корень. Это вытекает из теоремы Штурма и того факта, что решением уравнения $y'' + k^2 y = 0$ является функция $y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$, обладающая этим свойством. Таким образом, собственные функции (с большими номерами) регулярных операторов Штурма-Лиувилля являются осциллирующими.

6. Преобразование Фурье

6.1. Интеграл Фурье: интуитивный подход

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую на всей действительной оси абсолютно интегрируемую функцию $f(x)$

$$f \in C^1(\mathbf{R}): \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty.$$

Разложим ее в ряд Фурье на интервале $[-l, l]$ большой длины $2l$:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(t) e^{i\frac{\pi k}{l}(x-t)} dt, \quad x \in (-l, l)$$

Введем разбиение оси \mathbf{R} точками $\lambda_k = \frac{\pi k}{l}$ ($k \in \mathbf{Z}$), при

этом $\Delta\lambda_k = \frac{\pi}{l}$ и $\lim_{l \rightarrow +\infty} \Delta\lambda_k = 0$. Одновременно выполняется предельный переход и в интеграле

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^{+l} f(t) e^{i\lambda_k(x-t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt.$$

Можно думать (вспоминая суммы Римана), что

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta\lambda_k \int_{-l}^{+l} f(t) e^{i\lambda_k(x-t)} dt \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{l \rightarrow +\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt,$$

т. е. при всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо тождество

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt. \quad (6.1)$$

Последняя формула действительно имеет место и составляет содержание теоремы Фурье, а интеграл в правой части равенства называется интегралом Фурье функции $f(x)$. Равенство (6.1) принято разбивать на два

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad (6.2)$$

или, в симметричной форме,

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (6.3)$$

При этом функция $F(\lambda)$ (в обоих вариантах) называется преобразованием Фурье функции $f(x)$. Для определенности мы в дальнейшем будем пользоваться симметричной формой преобразования Фурье.

Для получения вещественной формы интеграла Фурье заметим, что если функция $f(x)$ – вещественная, то

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt. \end{aligned}$$

Равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt \quad (6.4)$$

остаётся справедливым и для комплексных функций (оно верно как для вещественной, так и для мнимой части комплекснозначной функции и в силу линейности интеграла – для произвольной их линейной комбинации).

Если воспользоваться формулой косинуса разности двух углов, равенство (6.5) запишется в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

Если функция $f(x)$ – четная, то $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt = 0$ (как интеграл от нечетной функции по симметричному интервалу) и интеграл Фурье приводится к виду

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \cos \lambda x \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt. \quad (6.5)$$

Аналогично, если функция $f(x)$ – нечетная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \sin \lambda x \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt. \quad (6.6)$$

Если функция $f(x)$ изначально задана на полуоси $[0, +\infty)$, то она может быть продолжена как четная или нечетная на всю вещественную ось. Это позволяет представить функцию на полуоси любой из формул (6.5), (6.6). Операторы

$$C: C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt \quad \text{и} \quad S: S(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt$$

называются соответственно косинус- и синус-преобразованиями Фурье. Согласно формулам (6.5), (6.6), повторное применение любого из этих двух преобразований возвращает нас к исходной функции.

6.2. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции

Пусть функция $f(x)$ — непрерывная (кусочно-непрерывная) и абсолютно интегрируемая на вещественной оси:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty. \quad (6.7)$$

Тогда определено отображение

$$f \xrightarrow{\mathfrak{F}} F, \quad F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx,$$

называемое преобразованием (оператором) Фурье. Оператор Фурье \mathfrak{F} является линейным (ввиду линейности интеграла):

$$\mathfrak{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathfrak{F}(f) + \beta \mathfrak{F}(g) = \alpha F + \beta G,$$

здесь α и β — константы. Отметим также следующие очевидные свойства преобразования Фурье функции $f(x)$.

1. $F(\lambda)$ — ограниченная функция, причем

$$\|F\|_{\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1,$$

где $\|F\|_{\infty} = \sup_{\lambda \in \mathbb{C}} |F(\lambda)|$ и $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$.

2. $F(\lambda)$ – равномерно непрерывная функция. Действительно,

$$e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x} = e^{-ix\frac{\xi-\eta}{2}} \left(e^{-ix\frac{\xi-\eta}{2}} - e^{ix\frac{\xi-\eta}{2}} \right) = -2i \sin \frac{(\xi-\eta)x}{2},$$

т.е. $|e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}| = 2 \left| \sin \frac{(\xi-\eta)x}{2} \right|$. Тогда

$$\begin{aligned} |F(\xi) - F(\eta)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\xi x} - e^{-i\eta x}) f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sin \frac{(\xi-\eta)x}{2} \right| \cdot |f(x)| dx = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x|>N} \left| \sin \frac{(\xi-\eta)x}{2} \right| \cdot |f(x)| dx \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x|>N} |f(x)| dx,$$

$$I_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x|\leq N} \left| \sin \frac{(\xi-\eta)x}{2} \right| \cdot |f(x)| dx,$$

Выберем N так, чтобы $I_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, где ε – произвольное положительное число. После этого выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{N\delta}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{N\delta}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{|x|\leq N} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \text{ Тогда при } |\xi - \eta| < \delta \text{ и}$$

$$|x| \leq N \text{ имеем } \left| \sin \frac{(\xi-\eta)x}{2} \right| < \frac{N\delta}{2} \text{ и, как следствие, } I_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тем самым

$$|\xi - \eta| < \delta \Rightarrow |F(\xi) - F(\eta)| < \varepsilon.$$

$$3. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0.$$

Действительно,

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = I_1 + I_2,$$

где слагаемые определены равенствами

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>N} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad |I_1| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>N} |f(x)| dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|\leq N} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Выберем N настолько большим, чтобы $|I_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, где ε – произвольное положительное число. После этого λ будем считать столь большим, чтобы $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$. Последнее возможно в силу леммы Римана-Лебега:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I_2 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|\leq N} f(x) e^{-i\lambda x} dx = 0.$$

Таким образом, при достаточно больших значениях λ $|F(\lambda)| < \varepsilon$.

6.3. Формула обращения

Для доказательства теоремы Фурье нам понадобится следующее свойство ядра Дирихле, которое в случае интеграла Фурье определяется равенством

$$D_N(x-t) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin N(x-t)}{x-t}.$$

Лемма 6.1. При $N > 0$ и при любом $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt = 1, \quad (6.8)$$

причем интеграл сходится равномерно по N при $N \geq 1$.

Доказательство. Установим равномерность. Пусть T – достаточно большое положительное число, так что $|x| < T$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_T^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt &= \int_T^{+\infty} \frac{d \cos N(x-t)}{N(x-t)} = \\ &= \frac{\cos N(x-t)}{N(x-t)} \Big|_T^{+\infty} - \int_T^{+\infty} \frac{\cos N(x-t)}{N(x-t)^2} dt. \end{aligned}$$

Откуда справедлива оценка

$$\left| \int_T^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt \right| \leq \frac{1}{(T-x)} + \int_T^{+\infty} \frac{1}{(t-x)^2} dt \quad \text{или}$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \int_T^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt \right| = 0.$$

Аналогично оценивается интеграл $\int_{-\infty}^{-T} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt$.

Для доказательства (6.8) достаточно установить равенство

$$(\text{при } N > 0) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = 1.$$

Отметим сначала независимость интеграла от N при положительных N , что становится очевидным при замене $\tau = Nt$, $d\tau = Ndt$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{Nt} d(Nt) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau.$$

Рассмотрим тогда функцию

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt, \quad x \geq 0.$$

Заметим, прежде всего, что он сходится равномерно по $x \geq 0$. Действительно, при $T > 0$

$$\begin{aligned} 2i \int_T^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt &= \int_T^{+\infty} \frac{e^{(-x+i)t}}{t} dt - \int_T^{+\infty} \frac{e^{(-x-i)t}}{t} dt = \\ &= \int_T^{+\infty} \frac{1}{t} d \left(\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} \right) - \int_T^{+\infty} \frac{1}{t} d \left(\frac{e^{(-x-i)t}}{-x-i} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t-x+i} \Big|_T^{+\infty} - \frac{1}{t-x-i} \Big|_T^{+\infty} + \int_T^{+\infty} \left(\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} - \frac{e^{(-x-i)t}}{-x-i} \right) \frac{dt}{t^2} = \\
&= -\frac{1}{T} \left(\frac{e^{(-x+i)T}}{-x+i} - \frac{e^{(-x-i)T}}{-x-i} \right) + \int_T^{+\infty} \left(\frac{e^{(-x+i)t}}{-x+i} - \frac{e^{(-x-i)t}}{-x-i} \right) \frac{dt}{t^2},
\end{aligned}$$

откуда

$$\left| \int_T^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt \right| \leq \frac{1}{T} + \int_T^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{T} \text{ и } \lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \int_T^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt \right| = 0.$$

Вычислим производную от $\Phi(x)$ (при $x > 0$ можно воспользоваться теоремой о дифференцировании интеграла по параметру):

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \left(e^{-(x+i)t} - e^{-(x-i)t} \right) dt = \\
&= -\frac{1}{\pi i} \left(\frac{e^{-(x+i)t}}{-x+i} - \frac{e^{-(x-i)t}}{-x-i} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{-x+i} - \frac{1}{-x-i} \right) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Заметим далее, что

$$|\Phi(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = -\frac{2}{\pi} \frac{e^{-xt}}{x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\pi x} \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0.$$

Тогда согласно формуле Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла

$$\Phi(+\infty) - \Phi'(0) = \int_0^{+\infty} \Phi'(x) dx = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \Big|_0^{+\infty} = -1.$$

С учетом равномерной по x сходимости интеграла $\Phi(x)$

$$\Phi(0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ или } \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 1.$$

Теорема 6.1 (Фурье). Пусть функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема на вещественной оси и пусть она дифференцируема в точке x . Тогда¹

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^{+N} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Доказательство. Положим

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\lambda(x-t)} dt.$$

Используя теорему об интегрировании несобственного интеграла по параметру и свойства четности, находим

$$\begin{aligned} f_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^{+N} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(x-t) dt + \frac{i}{2\pi} \int_{-N}^{+N} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_0^N \cos \lambda(x-t) d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) - f_N(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(t)}{x-t} \sin N(x-t) dt. \end{aligned}$$

Для построения оценки к предыдущему выражению применим к интегралу в правой части свойство аддитивности: рассмотрим три множества: $(-\infty, -T]$, $(-T, T]$ и $(T, +\infty)$, считая, что T достаточно велико, так что $|x| < T$. Величину T можно выбрать столь большой, что интегралы по множествам $(-\infty, -T]$ и $(T, +\infty)$ будут сколь угодно малы независимо от величины N при $N \geq 1$. Действительно, например,

¹ Сокращение *v.p.* (Valeur principale) перед знаком интеграла читается как «главное значение» интеграла. Предложено О. Коши.

$$\int_T^{+\infty} \frac{f(x) - f(t)}{x-t} \sin N(x-t) dt = f(x) \int_T^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt - \int_T^{+\infty} \frac{f(t) \sin N(x-t)}{x-t} dt$$

откуда (см. предыдущую лемму)

$$\left| f(x) \int_T^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt \right| \leq \frac{2|f(x)|}{T-x},$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| f(x) \int_T^{+\infty} \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt \right| = 0$$

и [в силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$]

$$\left| \int_T^{+\infty} \frac{f(t) \sin N(x-t)}{x-t} dt \right| \leq \frac{1}{T-x} \int_T^{+\infty} |f(t)| dt,$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left| \int_T^{+\infty} \frac{f(t) \sin N(x-t)}{x-t} dt \right| = 0.$$

Если T уже выбрано так, интеграл по множеству $(-\infty, -T] \cup (T, +\infty)$ меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, где ε – произвольное наперед заданное положительное число, оставшийся средний интеграл в правой части равенства (5.10) может быть сделан сколь угодно малым при $N \rightarrow +\infty$ в силу леммы Римана-Лебега:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-T}^{+T} \frac{f(x) - f(t)}{x-t} \sin N(x-t) dt = 0.$$

Использование леммы Римана-Лебега допустимо ввиду того, что функцию $\frac{f(x) - f(t)}{x-t}$ переменной t можно доопределить как непрерывную всюду на интервале $[T, -T]$, поскольку в

точке $t = x$ она имеет устранимый разрыв:

$\lim_{t \rightarrow x} \frac{f(x) - f(t)}{x-t} = f'(x)$. Выберем N столь большим, чтобы

второй интеграл суммы по модулю был меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда справедлива оценка $|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon$.

6.4. Обратное преобразование Фурье

Как следует из доказанной выше теоремы Фурье, если функция $f(x)$ является дифференцируемой и абсолютно интегрируемой на вещественной оси, то преобразование Фурье

$$\mathfrak{F}: F = \mathfrak{F}f, \quad F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx$$

имеет обратное преобразование

$$\mathfrak{F}^{-1}: f = \mathfrak{F}^{-1}F, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Заметим, что если функция $f(x)$ является абсолютно интегрируемой, то обратное преобразование Фурье \mathfrak{F}^{-1} можно описать равенством

$$\mathfrak{F}^{-1} = P\mathfrak{F},$$

где оператор P является оператором «отражения» $P: f(-x) = Pf(x)$. Отметим также коммутационное соотношение $P\mathfrak{F} = \mathfrak{F}P$, которое легко доказывается заменой переменной в интеграле:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}Pf)(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x) e^{-i\lambda x} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x) e^{i\lambda x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x) e^{i\lambda x} dx = (P\mathfrak{F}f)(\lambda). \end{aligned}$$

6.5. Гладкость преобразований Фурье

Если функция $f(x)$ непрерывна и сходится интеграл (6.7), то преобразование Фурье $F(\lambda)$ является непрерывно диффе-

ренцируемой функцией, причем производная $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}$ является преобразованием Фурье функции $ixf(x)$:

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} -(ix)f(x)e^{-i\lambda x} dx.$$

Это сразу вытекает из теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, поскольку интеграл справа, полученный формальным дифференцированием преобразования Фурье функции $f(x)$ под знаком интеграла, сходится равномерно по λ . Как следствие получаем: если функция $f(x)$ непрерывна и абсолютно интегрируема со степенью $|x|^n$, ее образ Фурье $F(\lambda)$ является n раз непрерывно дифференцируемой функцией, причем

$$\frac{d^n F(\lambda)}{d^n \lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^n f(x)e^{-i\lambda x} dx.$$

Рассмотрим теперь вопрос о скорости убывания преобразования Фурье гладкой функции.

Теорема 6.2. Пусть теперь функция $f(x)$ – непрерывно дифференцируема, причем $f(x)$ и $f'(x)$ – абсолютно интегрируемы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < +\infty.$$

Тогда имеет место соотношение $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = i\lambda F(\lambda)$, в частно-

сти $F(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$ при $|\lambda| \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Согласно формуле Ньютона-Лейбница $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$ и абсолютной интегрируемости функ-

ции $f'(x)$ существуют пределы $\lim_{a \rightarrow -\infty} f(a)$ и $\lim_{b \rightarrow +\infty} f(b)$. Если любой из этих пределов не равен нулю, функция $f(x)$ не может быть абсолютно интегрируемой на \mathbf{R} , таким образом, $\lim_{a \rightarrow -\infty} f(a) = 0$ и $\lim_{b \rightarrow +\infty} f(b) = 0$. Тогда, интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}f'(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)e^{-i\lambda x} dx = \frac{f(x)e^{-i\lambda x}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-i\lambda)e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \frac{(i\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx = (i\lambda)F(\lambda). \end{aligned}$$

Как следствие, если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема n раз и абсолютно интегрируема на \mathbf{R} вместе со своими производными, то ее образ убывает на бесконечности быстрее, чем $|\lambda|^{-n}$:

$$F(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right), \text{ причем } \mathfrak{F}\left(\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right) = (i\lambda)^n F(\lambda).$$

Таким образом, при преобразовании Фурье операция умножения на независимую переменную x переходит в операцию дифференцирования (по λ) с точностью до множителя i , а операция дифференцирования по x переходит в операцию умножения на независимую переменную λ с точностью до того же множителя i .

6.6. Пространство Шварца

В теории интеграла Фурье важную роль играет пространство Шварца $G(\mathbf{R})$ гладких быстро убывающих функций. Это пространство функций состоит из бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со всеми своими производными убывают на бесконечности быстрее любой степени $|x|$:

$$|f(x)| \leq \frac{C_k}{1+|x|^k}, \quad \left| \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right| \leq \frac{C_{n,k}}{1+|x|^k} \quad \forall n, k \in \mathbf{N}.$$

Согласно предыдущему пункту оператор Фурье \mathfrak{F} функцию класса Шварца переводит снова в функцию класса Шварца. Поскольку обратный оператор Фурье с точностью до отражения \mathbf{P} совпадает с преобразованием Фурье, то заключаем, что оператор Фурье отображает пространство Шварца на все пространство Шварца взаимно однозначно:

$$\mathfrak{F}: G(\mathbf{R}) \rightarrow G(\mathbf{R}) \text{ и } \mathfrak{F}^{-1}: G(\mathbf{R}) \rightarrow G(\mathbf{R}).$$

Превратим пространство Шварца в евклидово пространство, задавая в нем скалярное произведение и норму равенствами

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \text{ и } \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Напомним, что в абстрактном евклидовом пространстве \mathbf{V} оператор \mathbf{A}^* называется сопряженным к оператору \mathbf{A} , если

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}: (\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{A}^*\mathbf{b}).$$

Оператор \mathbf{A} называется при этом унитарным, если

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}: \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \text{ или } \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}.$$

Унитарное преобразование сохраняет скалярное произведение и, в частности, норму вектора:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}: (\mathbf{A}\mathbf{a}, \mathbf{A}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{E}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{ и} \\ \|\mathbf{A}\mathbf{a}\| = \|\mathbf{a}\|.$$

Теорема 6.3. Оператор Фурье унитарен на пространстве Шварца: $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $f, g \in G(\mathbf{R})$. Тогда

$$(\mathfrak{F}f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right) \overline{g(\lambda)} d\lambda = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} \overline{g(\lambda)} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda} = (f, \mathfrak{T}^{-1}g)$$

Перестановка порядков интегрирования возможна ввиду равномерной сходимости интегралов.

Следствие 6.1 (Равенство Парсеваля).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

В дальнейшем через \mathfrak{T}^* будет обозначаться оператор

$$\mathfrak{T}^* = P\mathfrak{T}, \quad \mathfrak{T}^* : f \mapsto F^*, \quad F^*(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$$

и называться сопряженным преобразованием Фурье.

Замечание 6.1. Как легко видеть, формула $(\mathfrak{T}f, g) = (f, \mathfrak{T}^*g)$ будет верна для значительно более широкого класса функций, нежели пространство Шварца.

Достаточно, чтобы $f(x)$ и $g(x)$ были непрерывными (кусочно непрерывными), абсолютно интегрируемыми функциями. Как следствие, будем иметь равенство

$$(F, G) = (f, g),$$

если $f(x)$ – непрерывная, абсолютно интегрируемая функция, а $G(\lambda)$ – абсолютно интегрируемый образ Фурье дифференцируемой и абсолютно интегрируемой функции $g(x)$. Действительно в силу формулы обращения $g = \mathfrak{T}^{-1}G$ и тогда

$$(F, G) = (\mathfrak{T}f, G) = (f, \mathfrak{T}^{-1}G) = (f, g).$$

В частности, равенство Парсеваля $\|F\| = \|f\|$ сохраняет силу, когда $F(\lambda)$ – абсолютно интегрируемый образ Фурье дифференцируемой и абсолютно интегрируемой функции $f(x)$ ¹.

¹ В действительности, методами функционального анализа можно показать, что для равенства Парсеваля достаточно лишь одной квадратичной интегрируемости функций.

7. Свертка функций

Сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$ на вещественной оси \mathbb{R} называется интеграл

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt. \quad (7.1)$$

В отличие от периодического случая мы должны позаботиться о сходимости интеграла (7.1). Например, достаточно потребовать непрерывности и абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ и непрерывности и ограниченности функции $g(x)$ или наоборот, непрерывности и абсолютной интегрируемости функции $g(x)$ и непрерывности и ограниченности функции $f(x)$. Как и в периодическом случае, легко показать, что свертка коммутативна:

$$f * g = g * f.$$

Свертка на бесконечном интервале, как и свертка периодическая, часто используется для сглаживания функции. Пусть $f(x)$ – равномерно непрерывная функция на вещественной оси. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и $\delta > 0$ таково, что

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Возьмем произвольно гладкую (непрерывно дифференцируемую или даже бесконечно дифференцируемую) функцию $\omega(x)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\omega(x) \geq 0$,
- 2) $\omega(x)$ – четная функция,
- 3) $\omega(x) = 0$ при $|x| \geq \delta$,
- 4) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)dx = 1$.

Напомним, что в силу этих свойств $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x-t)dx = 1$.

Рассмотрим свертку $g = f * \omega$:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \omega(x-t) dx.$$

Здесь интеграл практически не является несобственным – интегрирование реально ведется по интервалу $|x-t| \leq \delta$. Функция $g(x)$ является, очевидно, гладкой, причем

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \omega'(x-t) dx.$$

Вместе с тем функция $g(x)$ является равномерной аппроксимацией функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(t)) \cdot \omega(x-t) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x-t| \leq \delta} |f(x) - f(t)| \cdot \omega(x-t) dt \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x-t| \leq \delta} \omega(x-t) dt = 1. \end{aligned}$$

Однако свертка функций не улучшает, вообще говоря, их убывания. Нас свертка будет интересовать с точки зрения преобразования Фурье.

Теорема 7.1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны и абсолютно интегрируемы на вещественной оси:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dx < +\infty. \text{ Тогда}$$

$$(\mathfrak{F}f)^* g = \mathfrak{F}(f \cdot \mathfrak{F}^* g) \text{ или } F^* g = \mathfrak{F}^*(f \cdot G^*), \quad G^* = \mathfrak{F}^* g.$$

Доказательство. Существование свертки очевидно ввиду ограниченности функции $F(\lambda)$. Формула вытекает из очевидных преобразований

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda - \eta) g(\eta) d\eta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta g(\eta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix(\lambda - \eta)} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ix\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) e^{ix\eta} d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) G(x) e^{-ix\lambda} dx. \end{aligned}$$

Следствие 7.1. В предположениях предыдущей теоремы верна также формула

$$(\mathfrak{I}^* f)^* g = \mathfrak{I}^*(f \cdot \mathfrak{I} g). \quad (7.2)$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g(-x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-u) \cdot g(-x+u) du, \quad \text{откуда}$$

$$P(f * g) = (Pf) * (Pg). \quad \text{Тогда} \quad P(\mathfrak{I} f * g) = \mathfrak{I}^* f * (Pg) \quad \text{и}$$

$$P\mathfrak{I}(f \cdot \mathfrak{I}^* g) = \mathfrak{I}^*(f \cdot \mathfrak{I} Pg). \quad \text{В силу теоремы}$$

$\mathfrak{I}^* f * Pg = \mathfrak{I}^*(f \cdot \mathfrak{I} Pg)$. После замены Pg на g получаем искомое.

Теорема 7.2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывны, абсолютно и квадратично интегрируемы:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx < +\infty,$$

то свертка $f * g$ является абсолютно интегрируемой функцией и

$$\mathfrak{I}(f * g) = F \cdot G.$$

Доказательство. Заметим, что в силу неравенства Шварца свертка $f * g$ существует, причем интеграл сходится равномерно по x :

$$\int_{|t| \geq T} |f(t)g(x-t)|^2 dt \leq \int_{|t| \geq T} |f(t)|^2 dt \int_{|t| \geq T} |g(x-t)|^2 dt \leq \int_{|t| \geq T} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)|^2 ds.$$

Отсюда, согласно теореме об интегрировании несобственного интеграла по параметру, свертка также является абсолютно интегрируемой функцией:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x-t) dt \right| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)g(x-t)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt |f(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx \int_{-\infty}^{+\infty} |g(s)| ds. \end{aligned}$$

Применяя теорему об интегрировании несобственного интеграла по параметру, находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-i\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\lambda t} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda(x-t)} g(x-t) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{-i\lambda s} ds. \end{aligned}$$

Замечание 7.1. В условиях предыдущей теоремы справедливо соотношение

$$f * g = \mathfrak{F}^*(F \cdot G).$$

Причем произведение $F \cdot G$ является абсолютно интегрируемой функцией, откуда, в частности, вытекают непрерывность и убывание на бесконечности свертки $f * g$ (ввиду соответствующих свойств преобразований Фурье абсолютно интегрируемых функций).

8. Применение интеграла Фурье

8.1. Фурье-преобразования некоторых функций

Вычислим преобразования Фурье для некоторых часто используемых функций. Определим функцию Хевисайда (единичный скачок) $h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$ и функцию знака:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Пример 8.1 (Усеченная правая экспонента). Найти преобразование Фурье функции $f_1(x) = e^{-x} h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{aligned}
 F_1(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{x(-1-i\lambda)} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left. \frac{e^{x(-1-i\lambda)}}{-1-i\lambda} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+i\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1-i\lambda}{1+\lambda^2}.
 \end{aligned}$$

Пример 8.2 (Усеченная левая экспонента). Найти преобразование Фурье функции $f_2(x) = e^x h(-x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

Решение. Учтем результаты предыдущего примера. Тогда $f_2 = P f_1$, откуда $F_2 = P F_1$, т.е.

$$F_2(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Пример 8.3 (Экспонента Лапласа). Найти преобразование Фурье функции $f_3(x) = e^{-|x|}$.

Решение. В силу соотношения $f_3 = f_1 + f_2$ находим

$$F_3(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Пример 8.4 (Экспонента Лапласа со знаком). Найти преобразование Фурье функции $f_4(x) = \operatorname{sgn}(x) \cdot e^{-|x|}$.

Решение. В силу соотношения $f_4 = f_1 - f_2$ находим

$$F_4(\lambda) = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Пример 8.5 (Функция Коши). Найти преобразование Фурье функции $f_5(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение. Заметим, что выполняется равенство

$$\mathfrak{F}^* f_5(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\lambda|}. \text{ Тогда в силу } \mathfrak{F} = P \mathfrak{F}^*$$

$$F_5(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|\lambda|}.$$

Пример 8.6 (Функция Коши со знаком). Найти преобразование Фурье функции $f_6(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Решение. Заметим, что справедливо равенство $\mathfrak{F}^* f_6(\lambda) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\lambda) e^{-|\lambda|}$. Тогда по аналогии с предыдущим

$$F_6(\lambda) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\lambda) e^{-|\lambda|}.$$

Пример 8.7 (Функция стробирования). Найти преобразование Фурье функции

$$f_7(x) = h(x+1) - h(x-1) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Решение. Непосредственное применение формулы преобразования Фурье приводит к

$$F_7(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\lambda} - e^{i\lambda}}{-i\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$$

Пример 8.8 (Функция $\sin c$). Найти преобразование Фурье функции $f_8(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Заметим, что $\mathfrak{F}^* f_8(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} f_7(x)$. Тогда (в силу четности) имеем

$$F_8(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} f_7(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\begin{cases} 1, & \lambda \in [-1; 1], \\ 0, & \lambda \notin [-1; 1] \end{cases} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (h(\lambda+1) - h(\lambda-1)).$$

Выпишем для этого случая равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \right)^2 dx = \pi.$$

Пример 8.9 (Экспонента Гаусса). Найти преобразование Фурье функции $f_9(x) = e^{-x^2}$.

Решение. Заметим, что выполняется

$$F_9(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\lambda x) dx.$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{dF_9(\lambda)}{d\lambda} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \sin(\lambda x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\lambda x) d\left(\frac{e^{-x^2}}{2}\right) = \\ &= -\frac{\lambda}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\lambda x) dx = -\frac{\lambda}{2} F_9(\lambda). \end{aligned}$$

Решая полученное дифференциальное уравнение, находим

$$F_9(\lambda) = C e^{-\lambda^2},$$

константа определяется из начального условия

$$F_9(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Окончательно

$$F_9(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda^2}.$$

Отметим, что в примерах 6 и 8 функции $f_6(x)$ и $f_8(x)$ не являются абсолютно интегрируемыми. Сведем рассмотренные функции и их преобразования Фурье в таблицу

Таблица 8.1

Функции и их преобразования Фурье

Исходная функция (выражение) $f(x)$	Фурье-преобразование $F(\lambda)$
$e^{-x} h(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-i\lambda}{1+\lambda^2}$
$e^x h(-x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1+i\lambda}{1+\lambda^2}$

$e^{- x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+\lambda^2}$
$\operatorname{sgn}(x) \cdot e^{- x }$	$i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{- \lambda }$
$\frac{x}{1+x^2}$	$-i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\lambda) e^{- \lambda }$
$h(x+1) - h(x-1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}$
$\frac{\sin x}{x}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (h(\lambda+1) - h(\lambda-1))$
e^{-x^2}	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\lambda^2}$

8.2. Сводка формул

На практике полезны следующие простые свойства преобразования Фурье (см. табл. 8.2).

Таблица 8.2

Основные свойства преобразования Фурье

Исходная функция (выражение) $f(x)$	Фурье-преобразование $F(\lambda)$	Примечания
$f(ax)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{\lambda}{a}\right)$	Теорема подобия
$f(x)e^{i\alpha x}$	$F(\lambda - \alpha)$	Теорема сдвига
$f(x)\cos \alpha x$	$\frac{F(\lambda - \alpha) + F(\lambda + \alpha)}{2}$	Теорема модуляции косинусом
$f(x)\sin \alpha x$	$\frac{F(\lambda - \alpha) - F(\lambda + \alpha)}{2i}$	Теорема модуляции синусом

$f(x-b)$	$F(\lambda)e^{-ib\lambda}$	Теорема запаздывания
$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$(i\lambda)^n F(\lambda)$	Дифференцирование функции
$x^n f(x)$	$i^n \frac{d^n F(\lambda)}{d\lambda^n}$	Дифференцирование преобразования
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$	$F(\lambda) \cdot G(\lambda)$	Теорема свертки

Схематично проведем доказательства части этих свойств (теорем).

$$\begin{aligned}
 1. \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)e^{-i\lambda x} dx &= \left| \begin{array}{l} s = ax \\ ds = a dx \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-i\frac{\lambda}{a}s} ds = \frac{1}{a} F\left(\frac{\lambda}{a}\right). \\
 2. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x} e^{-i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(\lambda-\alpha)x} dx = F(\lambda-\alpha). \\
 3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos \alpha x e^{-i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} e^{-i\lambda x} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(\lambda-\alpha)x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i(\lambda+\alpha)x} dx = \frac{F(\lambda-\alpha) + F(\lambda+\alpha)}{2}. \\
 4. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-b)e^{-i\lambda x} dx &= \left| \begin{array}{l} s = x-b \\ ds = dx \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-i\lambda(s+b)} ds = \\
 &= e^{-i\lambda b} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-i\lambda s} ds = F(\lambda)e^{-i\lambda b}.
 \end{aligned}$$

8.3. Ядро Дирихле

В качестве иллюстрации вычислим преобразование Фурье функции $f_N(x)$, введенной при доказательстве теоремы Фурье. Напомним, что ядро Дирихле было определено равенством

$$D_N(x) = \frac{\sin Nx}{\pi x} = \frac{N}{\pi} \cdot \frac{\sin(Nx)}{Nx}.$$

Его Фурье-образ, согласно теореме подобия, равен

$$(\mathfrak{I}D_N)(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(h\left(\frac{\lambda}{N} + 1\right) - h\left(\frac{\lambda}{N} - 1\right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (h(\lambda + N) - h(\lambda - N)).$$

Функция $f_N(x)$ совпадает со сверткой $f_N = \sqrt{2\pi} f * D_N$.

Тогда

$$F_N(\lambda) = F(\lambda)(h(\lambda + N) - h(\lambda - N)) = \begin{cases} F(\lambda), & \lambda \in [-N, N], \\ 0, & \lambda \notin [-N, N]. \end{cases}$$

8.4. Распространение тепла в бесконечном стержне

Рассмотрим задачу о распространении тепла в бесконечном стержне, если задана начальная температура $u(x, 0) = \varphi(x)$. Эту задачу принято называть задачей Коши для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbf{R}, \quad t \in (0, +\infty), \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Фиксируя t , подвергаем функцию $u(x, t)$ преобразованию Фурье: $(\mathfrak{I}u)(\lambda, t) = U(\lambda, t)$.

Тогда исходная задача Коши будет иметь следующий образ Фурье:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -a^2 \lambda^2 U, & \lambda \in \mathbf{R}, \quad t \in (0, +\infty), \\ U(\lambda, 0) = \Phi(\lambda), & \lambda \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Здесь $\Phi(\lambda) = (\mathfrak{I}\varphi)(\lambda)$. Решаем полученное дифференциальное уравнение при заданном фиксированном значении λ :

$$U(\lambda, t) = \Phi(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Решение исходной задачи находится по формуле

$$u(x, t) = (\mathfrak{I}^{-1}U)(x, t).$$

Воспользуемся теоремой о свертке в форме 7.2:

$$\mathfrak{I}^*(e^{-a^2 \lambda^2 t}) * \varphi(x) = \mathfrak{I}^*(e^{-a^2 \lambda^2 t} \cdot (\mathfrak{I}\varphi)(\lambda))$$

Заметим, что в силу четности (по λ) и теоремы подобия (роль множителя играет $a\sqrt{t}$)

$$\mathfrak{F}^*(e^{-a^2\lambda^2 t}) = \mathfrak{F}(e^{-a^2\lambda^2 t}) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

(Здесь также поменялись местами переменные x и λ .) Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} ds.$$

Отметим, что в отличие от волнового уравнения параметр a не интерпретируется как скорость распространения тепла. Как видно из полученного решения, скорость распространения тепла бесконечна (с точки зрения данной модели). в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$ изменение температуры $u(x, t)$ происходит на всем протяжении бесконечного стержня (для всех x).

8.5. Амплитудный и частотный спектры

В связи с предельным переходом, описанным в разделе 6.1, полезно познакомиться с понятием спектра функции.

Пусть $f(x)$ – вещественная периодическая функция с периодом $2l$. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x),$$

где $\omega_k = \frac{\pi k}{l}$, $k \in \mathbf{N}$.

Величины ω_k интерпретируются как частоты колебаний и называются гармониками, причем гармоника ω_1 называется основной частотой, остальные гармоники $\omega_k = k\omega_1$, кратные основной, называются обертонами. Введем величины

$$A_0 = \frac{a_0}{2}, A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, k \in \mathbf{N}.$$

Разложение в ряд Фурье может быть переписано в виде

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k x + \varphi_k),$$

где фазы колебаний φ_k определяются равенствами¹

$$\sin \varphi_k = \frac{a_k}{A_k}, \quad \cos \varphi_k = \frac{b_k}{A_k}.$$

Последовательность амплитуд колебаний A_k , отнесенных к соответствующим гармоникам, и носит название дискретного амплитудного спектра, а последовательность фаз φ_k , также отнесенная к соответствующим гармоникам, называется фазовым или частотным спектром. Поскольку последовательность амплитуд и фаз определена только для целых значений индексов, то график спектра – суть решетчатая функция.

Пример 8.10. Найти спектр пилообразной $2l$ -периодической функции, заданной на периоде равенством $f(x) = x$, $x \in [-l; l]$.

Решение. Воспользуемся разложением нечетной функции. Ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} 2l}{\pi k} \sin \omega_k x.$$

Амплитудный спектр равен $A_k = \frac{2l}{\pi k}$, $k \in \mathbf{N}$ (см. рис. 8.1),

а частотный $\varphi_k = \begin{cases} \pi, & k = 2n, n \in \mathbf{N}, \\ 0, & k = 2n - 1, n \in \mathbf{N}. \end{cases}$ Следует подчеркнуть,

что частотный спектр (см. рис. 8.1) не определяет функцию $f(x)$ однозначно.

¹ Возможно и иное определение фазы.

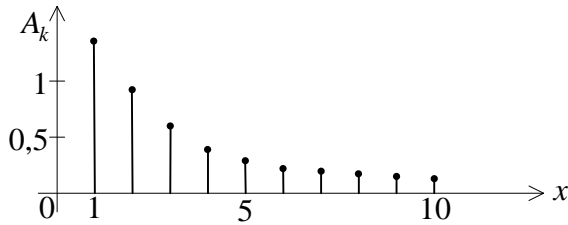


Рис. 8.1. Дискретный амплитудный спектр

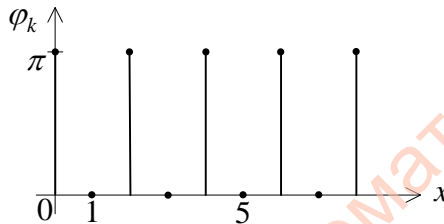


Рис. 8.2. Дискретный частотный спектр

Обобщим понятие спектра на случай преобразования Фурье. Совершая предельный переход $l \rightarrow \infty$, мы приходим к интегралу Фурье функции $f(x)$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

$$\text{где } a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx.$$

По аналогии с дискретным случаем вводятся непрерывные амплитудный и частотный спектры $A(\lambda) = \sqrt{a^2(\lambda) + b^2(\lambda)}$,

$$\varphi(\lambda) = \arctg \frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}. \quad \text{Заметим, что } F(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (a(\lambda) - ib(\lambda)) \text{ или}$$

$$A(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot |F(\lambda)|.$$

Величина $A(\lambda)$ служит мерой вклада частоты λ в функцию $f(x)$. Спектр преобразования Фурье – непрерывная функция.

Пример 8.11. Найти спектр преобразования Фурье усеченной правой экспоненты.

Решение. Воспользуемся результатами решения примера 8.1. Преобразование Фурье равно $F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1-i\lambda}{1+\lambda^2}$. Тогда амплитудный спектр равен:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{|1-i\lambda|}{1+\lambda^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Фазовый спектр равен $\Phi(\lambda) = \arctg \frac{1}{\lambda}$. На рис. 8.2 показан график амплитудного и фазового спектров этой функции.

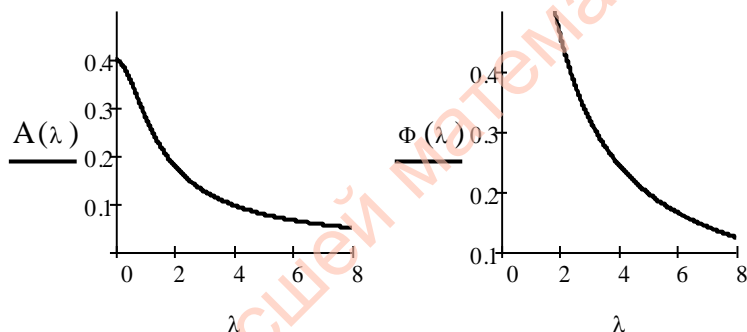


Рис. 8.3. Амплитудный и фазовый спектры усеченной правой экспоненты

Пример 8.12. Найти спектр преобразование Фурье стробилующей функции.

Решение. Воспользуемся результатами решения примера 8.7. Преобразование Фурье равно $F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}$. Тогда ам-

плитудный спектр равен: $A(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{\sin \lambda}{\lambda} \right|$. Фазовый спектр

равен $\Phi(\lambda) = \frac{\pi}{2}$. На рис. 8.2 показан график амплитудного и фазового спектров этой функции.

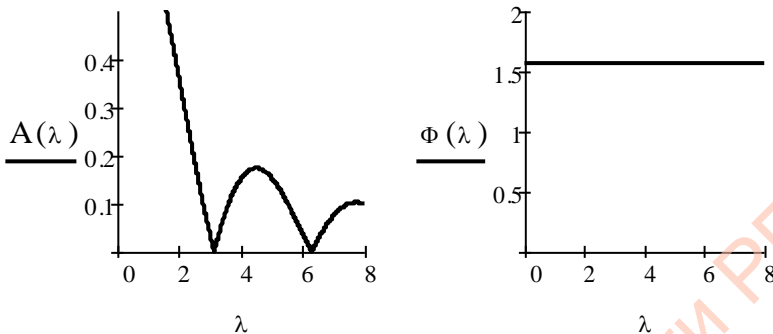


Рис. 8.2. Амплитудный и фазовый спектры функции стробирования.

8.6. Сходимость в среднеквадратичном

Мы докажем в этом разделе, что для произвольной кусочно-непрерывной и квадратично интегрируемой функции $f(x)$ интеграл

$$f_N(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt,$$

называемый простым интегралом Фурье функции $f(x)$, в среднеквадратичном сходится к функции $f(x)$, т.е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0, \quad \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx.$$

Если определить функцию $\tilde{D}_N(x) = \sqrt{2\pi} D_N(x)$, то интеграл $f_N(x)$ можно записать как свертку $f_N(x) = f * \tilde{D}_N(x)$.

Определим стробирующий (срезающий) оператор Γ_N . Если $f(x)$ – произвольная функция на оси, то

$$\Gamma_N f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [-N; N] \\ 0, & x \notin [-N; N] \end{cases}$$

Полученная функция называется финитной или имеющей конечный носитель $[-N; N]$.

Тогда если преобразование Фурье $F = \mathfrak{F}f$ функции $f(x)$ существует и как несобственный интеграл сходится равномерно, то простой интеграл Фурье запишется в виде

$$f_N = \mathfrak{F}^* \Gamma_N \mathfrak{F} f .$$

Нам будут полезны следующие две леммы.

Лемма 8.1 (Интегральное неравенство Минковского).

Для произвольной непрерывной функции $f(x, y)$ справедливо неравенство (пределы интегрирования могут быть бесконечными):

$$\sqrt{\int_a^b dx \left| \int_c^d f(x, y) dy \right|^2} \leq \int_c^d dy \sqrt{\int_a^b |f(x, y)|^2 dx} .$$

Доказательство. Определим функцию равенством $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. По неравенству Шварца

$$\int_a^b |f(x, y)g(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b |f(x, y)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx} .$$

Заметим, что

$$\int_a^b \left| \int_c^d f(x, y) dy \right|^2 dx = \int_a^b |g(x)|^2 dx .$$

При этом

$$\begin{aligned} \int_a^b |g(x)|^2 dx &\leq \int_a^b |g(x)| dx \int_c^d |f(x, y)| dy = \int_c^d dy \int_a^b |f(x, y)g(x)| dx \leq \\ &\leq \int_c^d dy \sqrt{\int_a^b |f(x, y)|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx} . \end{aligned}$$

Откуда

$$\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx} \leq \int_c^d dy \sqrt{\int_a^b |f(x, y)|^2 dx} ,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 8.2 (Равенство Парсеваля). Пусть f – финитная непрерывная (кусочно-непрерывная) функция и F – ее преобразование Фурье. Тогда

$$\|F\|^2 = \|f\|^2, \text{ т.е. } \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Доказательство. Напомним, что функция называется финитной, если она обращается в ноль на внешности некоторого конечного интервала. Предположим вначале, что $f(x)$ обращается в ноль вне интервала $[-\pi; \pi]$. Переопределим ее как 2π -периодическую, продолжая ее с интервала $[-\pi; \pi]$ на всю ось как периодическую. Для разложения, таким образом, переопределенной функции $f(x)$ в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

выполняется равенство Парсеваля для рядов:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Пусть $\alpha \in [0; 1)$. Тогда, заменяя $f(x)$ функцией $e^{-i\alpha x} f(x)$, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(\alpha)|^2, \quad c_k(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(k+\alpha)x} dx.$$

Заметим что выполняются $F(k+\alpha) = \sqrt{2\pi} c_k(\alpha)$. Откуда

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |F(k+\alpha)|^2.$$

Проинтегрируем полученное равенство по переменной α в пределах от 0 до 1, замечая, что

$$\int_0^1 |F(k+\alpha)|^2 d\alpha = \int_k^{k+1} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

В силу аддитивности интеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Рассмотрим теперь общий случай, считая, что функция $f(x)$ обращается в ноль вне интервала $[-l; l]$. Тогда функция

$g(x) = f(\alpha \cdot x)$, где $\alpha = \frac{l}{\pi}$, обращается в ноль вне интервала $[-\pi; \pi]$ и для нее верно равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda)|^2 d\lambda.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\alpha t)|^2 \alpha dt = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|^2 dx,$$

и, согласно теореме подобия,

$$G(\lambda) = bF(b\lambda), \quad b = \frac{1}{\alpha},$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(b\eta)|^2 b d\eta = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\eta)|^2 d\eta.$$

Перейдем к основному исследованию. Если $g(x)$ – финитная гладкая функция, то по теореме Фурье 6.1 интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} G(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = (g * D_N)(x) = (\mathfrak{F}^* \Gamma_N G)(x) = (\mathfrak{F}^* \Gamma_N \mathfrak{F} g)(x)$$

сходится к функции $g(x)$ при $N \rightarrow \infty$. Анализ доказательства теоремы Фурье показывает, что эта сходимости для финитной бесконечно дифференцируемой функции является равномерной по x на любом конечном интервале.

Пусть функция $g(x)$ обращается в ноль вне интервала $[a, b]$ и пусть K достаточно велико, так что $[a, b] \subset (-K, K)$.

Тогда утверждение о равномерной сходимости примет вид

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-K, K]} |g(x) - (g * D_N)(x)| = 0.$$

Воспользуемся неравенством

$$\|g - g * D_N\| \leq \sqrt{2K} \sup_{x \in [-K, K]} |g(x) - (g * D_N)(x)| + \int_{|x| > K} |(g * D_N)(x)|^2 dx.$$

Напомним, что

$$\int_{|x| > K} |(g * D_N)(x)|^2 dx = \int_{|x| > K} \left| \frac{1}{\pi} \int_a^b g(t) \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt \right|^2 dx$$

и в силу неравенства Минковского

$$\sqrt{\int_{|x| > K} \left| \frac{1}{\pi} \int_a^b g(t) \frac{\sin N(x-t)}{x-t} dt \right|^2 dx} \leq \frac{1}{\pi} \int_a^b |g(t)| dt \sqrt{\int_{|x| > K} \frac{\sin^2 N(x-t)}{(x-t)^2} dx}.$$

Интеграл по x в правой части неравенства сходится равномерно относительно N и $t \in [a, b]$ и, если K достаточно велико, может быть сделан сколь угодно малым независимо от N . Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Согласно сделанной оценке можно выбрать K столь большим, что независимо от N

$$\sqrt{\int_{|x| > K} |(g * D_N)(x)|^2 dx} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Фиксируем K , выберем N столь большим, чтобы

$$\sqrt{2K} \sup_{x \in [-K, K]} |g(x) - (g * D_N)(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Откуда заключаем, что при $N \rightarrow \infty$ для финитной гладкой функции $g(x)$ выполняются

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|g(x) - (g * D_N)(x)\| = 0.$$

Пусть теперь $f(x)$ – финитная непрерывная функция. Мы можем аппроксимировать ее равномерно финитной гладкой функцией, см. раздел 7. В силу финитности отсюда вытекает, что функция $f(x)$ может быть аппроксимирована с любой степенью точности финитной гладкой функцией $g(x)$ в среднеквадратичном. Фиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $\|f - g\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Заметим, что в силу неравенства треугольника:

$$\|f - f * D_N\| \leq \|f - g\| + \|g - g * D_N\| + \|g * D_N - f * D_N\|.$$

Выберем N столь большим, чтобы выполнялось неравенство $\|g - g * D_N\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Заметим, что

$g * D_N - f * D_N = h * D_N = \mathfrak{I}^* \Gamma_N \mathfrak{I} h$, $h = g - f$, и в силу леммы 8.2, дважды применной, справедливо $\|\mathfrak{I}^* \Gamma_N \mathfrak{I} h\| \leq \|\Gamma_N \mathfrak{I} h\| \leq \|\mathfrak{I} h\| = \|h\|$. Как следствие имеем неравенство $\|f - f * D_N\| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f * D_N\| = 0$.

Полученное соотношение будет выполняться и для кусочно-непрерывных финитных функций, т.к. такие функции могут быть аппроксимированы в среднеквадратичном с любой степенью точности непрерывными финитными функциями, после чего предыдущие рассуждения применяются повторно.

Пусть, наконец, $f(x)$ – кусочно-непрерывная квадратично интегрируемая функция. Заметим, что опять с использованием леммы 8.2

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_a^b \left| \int_{K \leq |t| \leq L} f(t) D_N(x-t) dt \right|^2 dx} &\leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{K \leq |t| \leq L} f(t) D_N(x-t) dt \right|^2 dx} = \\ &= \|\mathfrak{I}^* \Gamma_N \mathfrak{I} (\Gamma_L f - \Gamma_K f)\| = \|\Gamma_N \mathfrak{I} (\Gamma_L f - \Gamma_K f)\| \leq \\ &\leq \|\mathfrak{I} (\Gamma_L f - \Gamma_K f)\| = \|\Gamma_L f - \Gamma_K f\| = \int_{K \leq |t| \leq L} |f(t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при L , стремящейся к бесконечности, получаем неравенство

$$\sqrt{\int_a^b \left| \int_{K \leq |t|} f(t) D_N(x-t) dt \right|^2 dx} \leq \sqrt{\int_{K \leq |t|} |f(t)|^2 dx}.$$

Отсюда

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{K \leq |t|} f(t) D_N(x-t) dt \right|^2 dx} \leq \sqrt{\int_{K \leq |t|} |f(t)|^2 dx}.$$

Тогда

$$\|f - f * D_N\| \leq \|f - \Gamma_K f\| + \|\Gamma_K f - \mathfrak{I}^* \Gamma_N \mathfrak{I} \Gamma_K f\| + \|\mathfrak{I}^* \Gamma_N \mathfrak{I} \Gamma_K f - \mathfrak{I}^* \Gamma_N \mathfrak{I} f\|,$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) D_N(x-t) dt \right|^2 dx} \leq \\ & \leq \sqrt{\int_{x \leq |x|} |f(x)|^2 dx} + \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \Gamma_K f(x) - \int_{-K}^{+K} f(t) D_N(x-t) dt \right|^2 dx} + \\ & \quad + \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_{K \leq |t|} f(t) D_N(x-t) dt \right|^2 dx}. \end{aligned}$$

В правой части этого неравенства первое и третье слагаемые могут быть сделаны сколь угодно малыми при достаточно большом K независимо от выбора N . Среднее слагаемое при фиксированном K может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого N (функция $\Gamma_N f$ является финитной). Таким образом, и в этом случае выполняется предельное равенство $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f * D_N\| = 0$.

9. Дискретное преобразование Фурье

Рассмотренные ранее примеры реализации метода Фурье применялись к функциям, обладающим той или иной непрерывностью и периодичностью. Однако метод может быть применен и для векторных пространств конечной размерности. Элементы таких пространств (векторы) интерпретируются как решетчатые функции¹: функция задается на конечном дискретном множе-

¹ Эквидистантный временной ряд.

стве значений аргумента $k = \{0, 1, \dots, n-1\} = \overline{0, n-1}$. Периодически продолжая функцию с этого множества, получаем решетчатую функцию, определенную на всем множестве целых чисел.

9.1. Линейное пространство решетчатых функций

Рассмотрим некоторый n -мерный вектор

$$\mathbf{f} = (f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{n-1}) = f_i, i = \overline{0, n-1}, \quad (9.1)$$

компоненты которого принадлежат некоторому числовому полю. Следуя традициям, нумерацию компонент этого вектора начинаем с нуля. В технических приложениях такой вектор часто называют евклидистантным временным рядом или временной последовательностью¹. При этом предполагается, что справедливо равенство $f_i = f(i\tau) = f(i)$, $i = \overline{0, n-1}$, где $f(t)$ – заданная непрерывная функция, τ – интервал приращения или дискретизации аргумента, который за счет выбора масштаба изменения переменной t может быть выбран равным единице.

На множестве таких векторов \mathbf{V} определим операции сложения векторов $\mathbf{f} = (f_0 \quad f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{n-1})$ и $\mathbf{g} = (g_0 \quad g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_{n-1})$, умножения вектора на комплексное число $z \in \mathbf{C}$ правилами:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} + \mathbf{g} &= (f_0 + g_0 \quad f_1 + g_1 \quad f_2 + g_2 \quad \dots \quad f_{n-1} + g_{n-1}), \\ z\mathbf{f} &= (zf_0 \quad zf_1 \quad zf_2 \quad \dots \quad zf_{n-1}). \end{aligned}$$

Тогда множество \mathbf{V} – линейное пространство.

Пусть комплексное число ω (корень n -й степени из единицы) в поле \mathbf{C} (комплексных чисел) определяется равенством (здесь $i^2 = -1$)

$$\omega = e^{-i\frac{2\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} - i \sin \frac{2\pi}{n}. \quad (9.2)$$

¹ Важно отметить, что это конечный набор чисел, хотя и называется рядом. Натуральное число n называют длиной временной последовательности.

В дискретном преобразовании Фурье оно играет основную роль и называется комплексной единицей. Для этого числа справедливы очевидные формулы, проверяемые непосредственно:

$$\omega^n = 1, \omega^{-k} = \omega^{n-k} = \overline{\omega^k}, \sum_{m=0}^{n-1} \omega^{(i-j)m} = n\delta_{ij}, \quad (9.3)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{s+k} = \omega^s \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^s \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{sk} = \frac{\omega^0 - \omega^{sn}}{1-\omega} = \frac{1-(\omega^n)^s}{1-\omega} = 0, \quad s \neq 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{sk} = n\delta_{0s},$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера, а черта над символом

ω – знак комплексного сопряжения: $\overline{\omega} = \omega^{-1}$. Последнее равенство в (9.3) называется условием ортогональности. Число (9.3) называется ядром преобразования.

С помощью комплексной единицы строится базис в линейном пространстве V , состоящий из векторов

$$\mathbf{e}_k = \left(1 \quad \omega^k \quad \omega^{2k} \quad \dots \quad \omega^{(n-1)k} \right)^T, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (9.4)$$

Для доказательства линейной независимости системы векторов \mathbf{e}_k $k = \overline{0, n-1}$ достаточно рассмотреть матрицу¹, столбцы которой суть координаты базисных векторов

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

¹ Циркуляционная матрица.

Это матрица Вандермонда. Следовательно, определитель матрицы заведомо отличен от нуля ($|\det(T)| = n$) и система векторов (9.4) линейно независима и является базисом.

В силу справедливости равенства $(\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_m \cdot \bar{\mathbf{e}}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} \bar{\omega}^{kn} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(m-n)} = n\delta_{mm}$ эти вектора ортогональны. Для их нормировки следует использовать множитель $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Тогда матрица $T = \frac{1}{\sqrt{n}}W$ – ортогональная матрица и справедливо $T^{-1} = T^*$. После этого система линейно независимых векторов (9.4) становится ортонормированной.

Рассмотрим взаимно-однозначное линейное преобразование в линейном пространстве V , осуществляемое с помощью оператора \mathbf{T} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{f} \text{ и } \mathbf{f} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad (9.5)$$

которое в координатной форме принимает вид следующих равенств:

$$F_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f_k \omega^{km} \text{ и } f_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} F_k \omega^{-km}, \quad m = \overline{0, n-1}. \quad (9.6)$$

Для доказательства взаимной однозначности построим следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} f_m &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} F_n \omega^{-kn} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} f_s \omega^{sk} \right) \omega^{-kn} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} f_s \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{sk} \omega^{-kn} \right) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} f_s n \delta_{sm} = f_m. \end{aligned}$$

9.2. Определение дискретного преобразования Фурье

Одномерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) временной последовательности $f_i, i = \overline{0, n-1}$, в поле комплексных чисел определим равенствами

$$F_k = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \omega^{ik}, \quad f_i = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F_k \omega^{-ki}, \quad i, k = \overline{0, n-1}, \quad (9.7)$$

первое из которых называется прямым ДПФ (переход от вектора $f_i, i = \overline{0, n-1}$, к вектору $F_k, k = \overline{0, n-1}$), а второе – обратным ДПФ (переход от вектора $F_k, k = \overline{0, n-1}$, к вектору $f_i, i = \overline{0, n-1}$)¹.

Прежде всего докажем взаимную однозначность ДПФ. Для этого подставим во второе равенство (9.7) ДПФ определяемую первым равенством последовательность F_k . И после изменения порядка суммирования получим тождество

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega^{jk} \right) \omega^{-ik} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{jk} \omega^{-ik} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k(j-i)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \delta_{ij} = \frac{1}{n} f_i n = f_i. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Первое и второе преобразования в формулах (9.7) взаимно обратные преобразования, как показано выше. Это означает, что их можно менять местами, произвольно выбирая, какое из них прямое ДПФ, а какое обратное.

Как видно из определения, ДПФ представляет собой некоторое линейное отображение из линейного пространства \mathbf{C}^n в \mathbf{C}^n . Определим матрицу W такого преобразования:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

¹ Нормирующий множитель $\frac{1}{n}$ в формуле (9.7) можно отнести как к первому, так и ко второму выражению.

$$W^{-1} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \bar{\omega} & \bar{\omega}^2 & \dots & \bar{\omega}^{n-1} \\ 1 & \bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^4 & \dots & \bar{\omega}^{2(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \bar{\omega}^{n-1} & \bar{\omega}^{2(n-1)} & \dots & \bar{\omega}^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Тогда определение ДПФ (9.7) записывается в матричном виде:

$$\bar{\mathbf{F}} = W \cdot \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = W^{-1} \cdot \bar{\mathbf{F}}.$$

По сравнению с предыдущим отличие заключается в том, что пропущен нормирующий множитель $\frac{1}{\sqrt{n}}$, который отнесен к матрице обратного преобразования.

При выполнении вычислений над суммами, содержащими временные ряды, возможны случаи, когда индексы компонент векторов будут выходить из множества целых чисел $\overline{0, n-1}$. Тогда мы будем приводить индексы в указанный интервал, прибавляя или отнимая целую величину, кратную длине временной последовательности n . Эта процедура эквивалентна тому, что временной ряд (9.1) копируется неограниченно как влево, так и вправо. При этом получается периодический временной ряд, определенный на множестве целых чисел. Период такой последовательности равен числу n , и, как нетрудно проверить, условие ортогональности (9.3) выполняется на произвольном последовательном множестве целых чисел длины n .

9.3. Свойства дискретного преобразования Фурье

Пусть две последовательности f_i и g_i , $i = \overline{0, n-1}$, имеют ДПФ, равные соответственно F_k и G_k , $k = \overline{0, n-1}$, тогда выполняются равенства, которые являются простыми следствиями формул (9.3).

Таблица 9.1

Свойства дискретного преобразования Фурье

Временная последова-	ДПФ последовательно-	Примечания
----------------------	----------------------	------------

Тельность	сти	
$af_i \pm \beta g_i$	$aF_k \pm \beta G_k$	Линейность
f_{-i}	F_{-k}	Зеркальное изображение (инверсия времени)
f_{i-T}	$\omega^{Tk} F_k$	Сдвиг ¹
$f_i * g_i = \sum_{m=0}^{n-1} f_m g_{i-m}$	$F_k G_k$	Циклическая свертка
$f_i g_i$	$F_k * G_k$	Произведение
$f_k \otimes g_k$	$F_k * G_{-k}$	Циклическая корреляция ²
$\begin{pmatrix} f_0 & 0 & f_1 & 0 & f_2 & \dots \\ & & f_{n-2} & 0 & f_{n-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{n-1} \\ F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{n-1} \end{pmatrix}$	Растяжение (прореживание нулями)
$\sum_{k=0}^{n-1} f_k$	F_0	Сумма
f_0	$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F_k$	Первый момент
$\sum_{k=0}^{n-1} f_k ^2$	$n \sum_{k=0}^{n-1} F_k ^2$	Второй момент

Остановимся на доказательстве некоторых свойств ДПФ. Доказательство проведем в поле комплексных чисел. Однако в силу выполнения равенств (9.3) и (9.8) (именно только эти равенства используются при доказательстве всех свойств) все эти

¹ Число T в формуле – произвольное целое число.

² Если числовые последовательности f_i , и g_i , $i = 0, n-1$, в формуле совпадают, то говорят о ДПФ автокорреляционной последовательности, которое равно $F_k F_{-k} = F_k \overline{F_k} = |F_k|^2$, $k = 0, n-1$.

свойства будут выполняться также и в произвольном числовом поле.

Пример 9.1. Доказать свойство инверсии ДПФ.

Решение. Пусть выполняется равенство $F_k = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \omega^{ik}$,

$k = \overline{0, n-1}$. Тогда справедливо соотношение

$\sum_{i=0}^{n-1} f_{-i} \omega^{ik} = \sum_{i=0}^{n-1} f_{-i} \omega^{-i(-k)} = F_{-k}$, $k = \overline{0, n-1}$, которое и доказывает свойство.

Пример 9.2. Доказать свойство свертки ДПФ (Теорема свертки).

Решение. Пусть выполняются равенства $F_k = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \omega^{ik}$,

$k = \overline{0, n-1}$, и $G_k = \sum_{i=0}^{n-1} g_i \omega^{ik}$, $k = \overline{0, n-1}$. Тогда получаем следующую цепочку рассуждений:

$$\begin{aligned} (F * G)_k &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} f_s g_{i-s} \right) \omega^{ik} = \sum_{s=0}^{n-1} f_s \sum_{i=0}^{n-1} g_{i-s} \omega^{ik} = \sum_{m=i-s}^{|m=i-s|} = \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} f_s \sum_{m=-s}^{n-s-1} g_m \omega^{(m+s)k} = \left(\sum_{s=0}^{n-1} f_s \omega^{sk} \right) \cdot \left(\sum_{m=0}^{n-1} g_m \omega^{mk} \right) = F_k G_k, \end{aligned}$$

$k = \overline{0, n-1}$, которая и доказывает искомое свойство.

Пример 9.3. Доказать свойство сдвига ДПФ.

Решение. Пусть выполняется равенство $F_k = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \omega^{ik}$,

$k = \overline{0, n-1}$. Рассмотрим следующее преобразование:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f_{i-T} \omega^{ik} = \sum_{j=i-T}^{|j=i-T|} f_j \omega^{(j+T)k} = \omega^{kT} \sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega^{jk} = \omega^{kT} F_k,$$

$k = \overline{0, n-1}$, что и требовалось доказать.

Пример 9.4. Доказать свойство прореживания ДПФ.

Решение. Пусть выполняется равенство $F_k = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \omega^{ik}$,

$k = \overline{0, n-1}$. Введем следующие обозначения: $\tilde{\omega} = e^{-i\frac{2\pi}{2n}}$ и $\tilde{f}_i = \begin{cases} f_j, & i = 2j, \\ 0, & i = 2j+1. \end{cases}$ Тогда справедливо равенство:

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \tilde{f}_i \tilde{\omega}^{ik} = |i = 2j| = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f}_{2j} \tilde{\omega}^{2jk} = \sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega^{jk} = F_k, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Кроме этого, в силу очевидного тождества $\tilde{\omega}^{i(k+n)} = \tilde{\omega}^{ik} \tilde{\omega}^{in} = \tilde{\omega}^{ik} e^{-i\frac{2\pi}{2n}n} = \tilde{\omega}^{ik}$ выполняется $F_{k+n} = F_k$, $k = \overline{0, n-1}$. Последнее равенство и доказывает свойство.

9.4. Двумерные числовые последовательности и двумерные дискретные преобразования Фурье

Одновременно с одномерными векторами (9.1) мы будем рассматривать последовательности, индексруемые двумя целыми переменными (двумерные числовые последовательности), организованные в виде таблицы:

$$\bar{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} f_{0,0} & f_{0,1} & f_{0,2} & f_{0,3} & \dots & f_{0,n_2} \\ f_{1,0} & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \dots & f_{1,n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n_1,0} & f_{n_1,1} & f_{n_1,2} & f_{n_1,3} & \dots & f_{n_1,n_2} \end{pmatrix} = f_{i_1, i_2}, \quad (9.10)$$

$$i_1 = \overline{0, n_1-1}, \quad i_2 = \overline{0, n_2-1}.$$

Для таких последовательностей определим двумерное ДПФ следующими равенствами:

$$F_{k_1, k_2} = \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} f_{i_1, i_2} \omega_1^{i_1 k_1} \omega_2^{i_2 k_2}, \quad (9.11)$$

$$f_{i_1, i_2} = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} F_{k_1, k_2} \omega_1^{-i_1 k_1} \omega_2^{-i_2 k_2},$$

где $\omega_1^{n_1} = 1, i_1, k_1 = \overline{0, n_1-1}, \omega_2^{n_2} = 1, i_2, k_2 = \overline{0, n_2-1}$.

Преобразуем исходную двумерную последовательность (9.10) в одномерную. Для этой цели расположим, например, элементы отдельных строк последовательно друг за другом: $f_i = f_{i_1 n_2 + i_2}$, $i = \overline{0, n_1 n_2 - 1}$, $i_1 = \overline{0, n_1 - 1}$, $i_2 = \overline{0, n_2 - 1}$. Получим одномерный вектор суммарной длины $n = n_1 n_2$. Положим $\omega = e^{-i \frac{2\pi}{n}}$, $i = i_1 n_2 + i_2$, $k = k_1 n_2 + k_2$, $i, k = \overline{0, n - 1}$, $i_1, k_1 = \overline{0, n_1 - 1}$, $i_2, k_2 = \overline{0, n_2 - 1}$. Вычислим ДПФ этой последовательности:

$$F_k = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \omega^{ik} = \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \sum_{i_1=0}^{n_1-1} f_{i_1 n_2 + i_2} \omega^{(i_1 n_2 + i_2)(k_1 n_2 + k_2)} = \\ = \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \left[\sum_{i_1=0}^{n_1-1} f_{i_1, i_2} \omega^{i_1 n_2 (k_1 n_2 + k_2)} \right] \omega^{i_2 (k_1 n_2 + k_2)}, \quad k = \overline{0, n - 1}.$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, имеет вид одномерного ДПФ, примененного к i_1 -й строке двумерной последовательности. Такую же структуру имеет и внешняя сумма. Таким образом, имеется возможность вычисления двумерного ДПФ с помощью алгоритмов, ориентированных на расчет одномерных ДПФ.

10. Задачи

10.1. Линейные пространства

Задача 10.1.1. Вычислить скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[0; 2\pi]$.

1. $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = 3x - 4$.	2. $f(x) = 5x + 1$, $g(x) = \cos 3x$.	3. $f(x) = 2x^3$, $g(x) = 4 - ix$.
4. $f(x) = -3x^2$, $g(x) = e^{2ix}$.	5. $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = e^{-3ix}$.	6. $f(x) = 2x^2 - 1$, $g(x) = \ln x$.
7. $f(x) = \sin 3x$,	8. $f(x) = 1 - 3x$, $g(x) = \cos(2ix)$.	9. $f(x) = \sin(3ix)$, $g(x) = 2x + 5$.

$g(x) = e^{4ix}$.		
--------------------	--	--

Задача 10.1.2. Вычислить нормы функций $f(x)$ и $g(x)$, заданных в задаче 1, затем пронормировать эти функции.

Задача 10.1.3. Найти, при каком значении λ функция $f(x)$ будет иметь заданное значение нормы $\|f(x)\|$ на $[0; 2\pi]$.

1. $f(x) = \lambda \cos x$, $\ f(x)\ = 2$.	2. $f(x) = \lambda \sin(2x)$, $\ f(x)\ = 4$.	3. $f(x) = \lambda e^{ix}$, $\ f(x)\ = 2$.
4. $f(x) = 3 + \lambda ix$, $\ f(x)\ = 5$.	5. $f(x) = \ln(\lambda x)$, $\ f(x)\ = 2$.	6. $f(x) = \lambda \cos(ix)$, $\ f(x)\ = 4$.
7. $f(x) = \lambda \sin(ix)$, $\ f(x)\ = 2$.	8. $f(x) = 2\lambda - 3x^2$, $\ f(x)\ = 4$.	9. $f(x) = 4x + \lambda ix^2$, $\ f(x)\ = 2$.

Задача 10.1.4. Найти, при каком значении λ заданные функции $f(x)$ и $g(x)$ будут ортогональны на отрезке $[0; 2\pi]$.

1. $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \lambda x^2$.	2. $f(x) = \lambda ix$, $g(x) = \cos 3x$.	3. $f(x) = \ln x$, $g(x) = 2 + \lambda x$.
4. $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = 3 + \lambda x$.	5. $f(x) = \cos 2x$, $g(x) = \cos \lambda x$.	6. $f(x) = \sin 3x$, $g(x) = \sin \lambda x$.

10.2. Тригонометрические ряды Фурье

Задача 10.1.5. 1. Функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$, разложить в ряд Фурье: а) общего вида, б) по косинусам, в) по синусам, г) в комплексной форме.

2. В одной системе координат начертить графики функции $f(x)$ и частичных сумм рядов а)-в) $S_4(x)$.

3. Построить амплитудный и фазовый спектры для ряда Фурье общего вида.

1. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ 2, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$	2. $f(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x < 1, \\ 3, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ x-2, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$	4. $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 2, \\ -1, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 4-3x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$	6. $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Задача 10.1.6. Решить ДУ $Ky' + My = f(x)$, где K и M – заданные числа, $f(x)$ – периодическая функция, на основном периоде – прямая, проходящая через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

1. $K = 3, M = -2,$ $A(0, 1), B(6, 3).$	2. $K = -4, M = 1,$ $A(0, -2), B(4, 0).$
3. $K = 6, M = 5,$ $A(1, 1), B(7, 3).$	4. $K = 3, M = 8,$ $A(2, 1), B(8, 3).$
5. $K = 1, M = -6,$ $A(1, 3), B(3, 7).$	6. $K = 4, M = 9,$ $A(0, -4), B(6, 2).$

10.3. Преобразование Фурье

Задача 10.3.7. Пользуясь определением, представить функцию интегралом Фурье.

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0; a), \\ 0, & x \notin (0; a), \end{cases} \quad a > 0.$	2. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0; 2), \\ 0, & x \notin (0; 2). \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \pi x, & x \in (-a; a), \\ 0, & x \notin (-a; a), \end{cases} \quad a > 0.$	4. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-3; 0), \\ 0, & x \notin (-3; 0). \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \in (-3; 3), \\ 0, & x \notin (-3; 3). \end{cases}$	6. $f(x) = \begin{cases} 3-x, & x \in (-5; 5), \\ 0, & x \notin (-5; 5). \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} x+1 , & x \in (-4; 0), \\ 0, & x \notin (-4; 0). \end{cases}$	8. $f(x) = \begin{cases} 1- x , & x \in (-2; 2), \\ 0, & x \notin (-2; 2). \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{ x }{a} - 1, & x \leq a, \\ 0, & x > a, \quad a > 0. \end{cases}$	10. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \in (-4; 4), \\ 0, & x \notin (-4; 4). \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$	12. $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}.$
13. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$	14. $f(x) = \begin{cases} \sin \omega x, & x \leq \frac{2\pi n}{\omega}, \\ 0, & x > \frac{2\pi n}{\omega}, \end{cases}$ $n \in \mathbf{N}, \omega > 0.$
15. $f(x) = e^{-\alpha x } \sin \beta x,$ $\alpha, \beta > 0.$	16. $f(x) = e^{-\alpha x } \cos \beta x,$ $\alpha, \beta > 0.$
17. $f(x) = e^{-\lambda x^2}, \lambda > 0.$	18. $f(x) = x e^{-\lambda x^2}, \lambda > 0.$
19. $f(x) = e^{- x }.$	20. $f(x) = e^{-x^2 + 2ix}.$
21. $f(x) = e^{-2x^2}.$	22. $f(x) = \operatorname{sgn}(x-a) - \operatorname{sgn}(x-b),$ $b > a.$
23. $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$	24. $f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \notin [0; \pi]. \end{cases}$
25. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$	26. $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$

Задача 10.3.8. Пользуясь определением, представить функ-

цию интегралом Фурье, продолжив ее нечетным образом на отрицательную полуось.

1. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \in (\pi; +\infty). \end{cases}$	2. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [\pi; 2\pi], \\ 0, & x \in [0; \pi) \cup (2\pi; +\infty). \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x \in [0; \frac{2}{3}], \\ 0, & x \in (\frac{2}{3}; +\infty). \end{cases}$	4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \in (\pi; +\infty). \end{cases}$
5. $f(x) = e^{-ax}, a > 0.$	6. $f(x) = e^{-x+3ix}.$
7. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$	8. $f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \in (\pi; +\infty). \end{cases}$

Задача 10.3.9. Пользуясь определением, представить функцию интегралом Фурье, продолжив ее четным образом на отрицательную полуось.

1. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \in (\pi; +\infty). \end{cases}$	2. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \notin [0; \pi]. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 2-3x, & x \in [0; \frac{2}{3}], \\ 0, & x \in (\frac{2}{3}; +\infty). \end{cases}$	4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \in (\pi; +\infty). \end{cases}$
5. $f(x) = e^{x+3ix}.$	6. $f(x) = e^{ax}, a > 0.$
7. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \in (1; +\infty). \end{cases}$	8. $f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [0; \pi], \\ 0, & x \in (\pi; +\infty). \end{cases}$

Задача 10.3.10. Найти косинус и синус преобразования функции, заданной на неотрицательной полуоси. Все параметры положительны.

1. $f(x) = e^{-\alpha x}.$	2. $f(x) = e^{-2x}.$
----------------------------	----------------------

Задача 10.3.10. Найти преобразование Фурье функции, применив теорему подобия.

1. $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 1}$.	2. $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$.
3. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 9}$.	4. $f(x) = e^{- 5x }h(x)$.

Задача 10.3.11. Найти преобразование Фурье функции, применив теорему сдвига.

1. $f(x) = e^{- x-ix}$.	2. $f(x) = e^{-x^2+2ix}$.
3. $f(x) = e^{-x^2} \cos 6x$.	4. $f(x) = e^{-x^2} \sin \pi x$.
5. $f(x) = e^{-x^2-\pi ix}$.	6. $f(x) = e^{-x^2} \cos 3x \sin x$.

Задача 10.3.12. Найти преобразование Фурье функции, применив теорему запаздывания.

1. $f(x) = e^{- x+4 }$.	2. $f(x) = e^{-x}h(x-10)$.
3. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$.	4. $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 4x + 5}$.
5. $f(x) = \frac{x-7}{x^2 + 4x + 5}$.	6. $f(x) = e^{-x} \sin(x-\pi)h(x)$.

Задача 10.3.13. Найти преобразование Фурье функции и ее первых двух производных, применив теорему дифференцирования функции.

1. $f(x) = e^{-x^2}$.	2. $f(x) = e^{-x^2-2x}$.
3. $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 1}$.	4. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$.
5. $f(x) = x^2 e^{- x }$.	6. $f(x) = x e^{- x }$.
7. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.	8. $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

Задача 10.3.14. Найти преобразование Фурье функции,

применив теорему дифференцирования преобразования Фурье.

1. $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x^2}$.	2. $f(x) = (x^2 - 2x + 5)e^{- x }$.
3. $f(x) = x(h(x+1) - h(x-1))$.	4. $f(x) = xe^{-2x}h(x)$.

Задача 10.3.15. Вычислить интеграл или решить интегральное уравнение.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.	2. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$.
3. $\int_0^{+\infty} \varphi(y) \cos xy dy = \frac{1}{1+x^2}$.	4. $\int_0^{+\infty} \varphi(y) \sin xy dy = e^{-x}, x > 0$.

10.4. Дискретное преобразование Фурье

Задача 10.4.1. Найти ДПФ решетчатой функции.

1. $f_k = e^k, k = \overline{0, n-1}$.	2. $f_k = x^k, k = \overline{0, n-1}$.
3. $f_k = i^{k+3}, k = \overline{0, n-1}$.	4. $f_k = \omega^{k-2}, k = \overline{0, n-1}$.
5. $f_k = \cos \frac{k}{n}, k = \overline{0, n-1}$.	6. $f_k = \sin \frac{k}{n}, k = \overline{0, n-1}$.
7. $f_k = \omega^{2k}, k = \overline{0, n-1}$.	8. $f_k = 2^{k-1}, k = \overline{0, n-1}$.

Задача 10.4.2. Построить матрицу одномерного ДПФ для последовательности длиной:

1. $n = 2$; 2. $n = 3$; 3. $n = 4$; 4. $n = 6$; 5. $n = 8$.

Задача 10.4.3. Найти ДПФ вектора и его зеркального изображения.

1. $\mathbf{f} = (1 \ 2)$.	2. $\mathbf{f} = (1 \ -1)$.
3. $\mathbf{f} = (3 \ 0 \ 1)$.	4. $\mathbf{f} = (1 \ -1 \ 1)$.
5. $\mathbf{f} = (1 \ 0 \ 7 \ 0)$.	6. $\mathbf{f} = (0 \ -1 \ 1 \ 0)$.
7. $\mathbf{f} = (1 \ 0 \ 2 \ 1)$.	8. $\mathbf{f} = (0 \ 0 \ -3 \ -1)$.

Задача 10.4.4. Непосредственно вычислить циклическую

свертку векторов.

1. $\mathbf{f} = (0 \ -3)$ и $\mathbf{g} = (1 \ -1)$.	2. $\mathbf{f} = (-1 \ 2)$ и $\mathbf{g} = (1 \ 2)$.
3. $\mathbf{f} = (5 \ -1 \ 8)$ и $\mathbf{g} = (3 \ -4 \ 2)$.	4. $\mathbf{f} = (-1 \ 0 \ -2)$ и $\mathbf{g} = (0 \ -2 \ 1)$.
5. $\mathbf{f} = (0 \ 0 \ -3 \ -1)$ и $\mathbf{g} = (0 \ 0 \ -3 \ -1)$.	6. $\mathbf{f} = (-5 \ -1 \ 2 \ 0)$ и $\mathbf{g} = (1 \ -3 \ 0 \ 2)$.
7. $\mathbf{f} = (0 \ 0 \ 3 \ -1 \ 0 \ 1)$ и $\mathbf{g} = (1 \ -1 \ 0 \ 0 \ -3 \ -1)$.	8. $\mathbf{f} = (1 \ 5 \ -1 \ 2 \ 0 \ 1)$ и $\mathbf{g} = (-1 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2 \ -1)$.
9. $\mathbf{f} = (0 \ 0 \ 3 \ -1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1)$ и $\mathbf{g} = (0 \ -1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -3 \ -1)$.	
10. $\mathbf{f} = (2 \ 3 \ -2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -3)$ и $\mathbf{g} = (2 \ 0 \ -2 \ 0 \ 1 \ 1 \ -2 \ 1)$.	

Задача 10.4.5. Вычислить ДПФ циклической свертки векторов двумя способами (непосредственно и с помощью теоремы свертки).

1. $\mathbf{f} = (2 \ 4)$ и $\mathbf{g} = (3 \ -2)$.	2. $\mathbf{f} = (3 \ -2)$ и $\mathbf{g} = (7 \ -3)$.
3. $\mathbf{f} = (-1 \ 5 \ 8)$ и $\mathbf{g} = (3 \ -2 \ -4)$.	4. $\mathbf{f} = (5 \ -2 \ -3)$ и $\mathbf{g} = (1 \ -3 \ 2)$.
5. $\mathbf{f} = (2 \ 0 \ -2 \ -2)$ и $\mathbf{g} = (0 \ -3 \ 3 \ 2)$.	6. $\mathbf{f} = (-1 \ -2 \ 1 \ -1)$ и $\mathbf{g} = (5 \ -2 \ 1 \ -4)$.
7. $\mathbf{f} = (3 \ 0 \ -1 \ 3 \ 1 \ 5)$ и $\mathbf{g} = (1 \ 2 \ -4 \ 2 \ 2 \ -1)$.	8. $\mathbf{f} = (1 \ 5 \ -1 \ 2 \ 0 \ 1)$ и $\mathbf{g} = (-1 \ 0 \ 3 \ 1 \ 2 \ -1)$.
9. $\mathbf{f} = (4 \ 5 \ 1 \ -2 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1)$ и $\mathbf{g} = (-9 \ -1 \ 2 \ 1 \ 0 \ -1 \ 3 \ -2)$.	
10. $\mathbf{f} = (-2 \ 1 \ -3 \ 1 \ -6 \ 0 \ 1 \ -8)$ и $\mathbf{g} = (2 \ -1 \ -2 \ 0 \ 1 \ 6 \ -2 \ 1)$.	

Задача 10.4.6. Непосредственно вычислить циклическую

свертку вектора \mathbf{f} с самим собой.

1. $\mathbf{f} = (-1 \ 2)$.	2. $\mathbf{f} = (-1 \ -2 \ 3)$.
3. $\mathbf{f} = (-1 \ 2 \ -3 \ 4)$.	4. $\mathbf{f} = (-9 \ 2 \ 1 \ 0 \ 4 \ -2)$.
5. $\mathbf{f} = (1 \ 0 \ 1 \ -2 \ -3 \ 4)$.	6. $\mathbf{f} = (0 \ 3 \ 0 \ 6 \ 0 \ 9)$.

Задача 10.4.7. Непосредственно вычислить циклическую корреляцию вектора \mathbf{f} с самим собой (автокорреляцию).

1. $\mathbf{f} = (9 \ -9)$.	2. $\mathbf{f} = (7 \ -1 \ -2)$.
3. $\mathbf{f} = (1 \ -3 \ -2 \ -2)$	4. $\mathbf{f} = (5 \ 3 \ 0 \ 10 \ -1 \ 2)$.
5. $\mathbf{f} = (-2 \ 1 \ 0 \ -1 \ 3 \ -5)$.	6. $\mathbf{f} = (0 \ 1 \ 0 \ 2)$.

Задача 10.4.8. Вычислить ДПФ автокорреляции вектора двумя способами (непосредственно и с помощью теоремы свертки).

1. $\mathbf{f} = (4 \ 2)$.	2. $\mathbf{f} = (-2 \ 5)$.
3. $\mathbf{f} = (2 \ 1 \ 0)$.	4. $\mathbf{f} = (-2 \ 9)$.
5. $\mathbf{f} = (-8 \ 5 \ 1)$.	6. $\mathbf{f} = (-4 \ -2 \ 7)$.
7. $\mathbf{f} = (-3 \ -2 \ 7)$.	8. $\mathbf{f} = (-2 \ -3 \ -1)$.
9. $\mathbf{f} = (2 \ 0 \ -2 \ -2)$.	10. $\mathbf{f} = (0 \ -3 \ 3 \ 2)$.
11. $\mathbf{f} = (1 \ 2 \ -1 \ 3)$.	12. $\mathbf{f} = (7 \ -2 \ 5 \ -2)$.
13. $\mathbf{f} = (5 \ 2 \ -1 \ 3 \ -1 \ 1)$.	14. $\mathbf{f} = (-1 \ -2 \ 4 \ 2 \ -2 \ 1)$.
15. $\mathbf{f} = (1 \ -5 \ 1 \ -2 \ 0 \ -1)$.	16. $\mathbf{f} = (-1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ -1)$.
17. $\mathbf{f} = (4 \ 5 \ 1 \ -2 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1)$.	
18. $\mathbf{f} = (-9 \ -1 \ 2 \ 1 \ 0 \ -1 \ 3 \ -2)$.	
19. $\mathbf{f} = (-2 \ 1 \ -3 \ 1 \ -6 \ 0 \ 1 \ -8)$.	
20. $\mathbf{f} = (2 \ -1 \ -2 \ 0 \ 1 \ 6 \ -2 \ 1)$.	

Задача 10.4.9. Восстановить последовательность по заданному ДПФ этой последовательности.

1. $\mathbf{F} = (4 \ 2)$.	2. $\mathbf{F} = (-2 \ 5)$.
-----------------------------	------------------------------

2. $\mathbf{F} = (3 \ -9 \ 27 \ -81).$	4. $\mathbf{F} = (-2 \ 9).$
5. $\mathbf{F} = (-8 \ 5 \ 1).$	6. $\mathbf{F} = (-4 \ -2 \ 7).$
7. $\mathbf{F} = (-3 \ -2 \ 7).$	8. $\mathbf{F} = (-2 \ -3 \ -1).$
9. $\mathbf{F} = (2 \ 0 \ -2 \ -2).$	10. $\mathbf{F} = (-1 \ -3 \ 3 \ 1).$
11. $\mathbf{F} = (1 \ -2 \ -1 \ -3).$	12. $\mathbf{F} = (7 \ -2 \ 5 \ -2).$
13. $\mathbf{F} = (5 \ 2 \ -1 \ 3 \ -1 \ 1).$	14. $\mathbf{F} = (-1 \ -2 \ 4 \ 2 \ -2 \ 1).$
15. $\mathbf{F} = (1 \ -5 \ 1 \ -2 \ 0 \ -1).$	16. $\mathbf{F} = (-1 \ 3 \ 1 \ 2 \ 0 \ -1).$
17. $\mathbf{F} = (4 \ 5 \ 1 \ -2 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1).$	
18. $\mathbf{F} = (-9 \ -1 \ 2 \ 1 \ 0 \ -1 \ 3 \ -2).$	
19. $\mathbf{F} = (-1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1 \ 0 \ -1).$	
20. $\mathbf{F} = (0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3).$	

Кафедра Высшей математики ФРПТУ

Предметный указатель

амплитудный спектр..... 90	косинус-преобразование Фурье
вариационный принцип..... 62	определение..... 67
дискретное преобразование	лемма
Фурье 103	интегрирование
ДПФ	периодических функций. 8
второй момент..... 106	Римана - Лебега..... 11, 25
инверсия..... 105	преобразование Фурье
комплексная базис 102	интегральное неравенство
комплексная единица 101	Минковского 95
определение..... 102	обратное..... 74
первый момент 106	основных функций..... 86
произведение 105	равенство Парсевала..... 95
прореживание нулями 106	свертка функций 79
сдвиг..... 105	свойства 87
сумм 106	спектр..... 92
циклическая корреляция	сходимость в среднем
..... 105	квадратичном 94
циклическая свертка 105	теорема запаздывания..... 87
евклидово пространство	теорема модуляции
замкнутость 13	косинусом 87
неравенство Бесселя 11	теорема модуляции синусом
неравенство Буняковского. 9 87
норма..... 9	теорема о
определение..... 8	дифференцировании
полнота 13	преобразования 87
скалярное произведение..... 8	теорема о
экстремальное свойство	дифференцировании
коэффициентов Фурье.. 12	функции 87
Задача о распространении	теорема подобия..... 87
тепла..... 88	теорема свертки..... 87
комплексная экспонента 7	теорема смещения..... 87
комплексное число	усеченная левая экспонента
алгебраическая форма 6 83
аргумент..... 6	усеченная правая экспонента
модуль..... 6 83
общая форма..... 5	формула обращения..... 70
сложение..... 5	функция интегральный
сопряжение..... 6	синус 85
тригонометрическая форма 6	функция Коши..... 84
умножение 6	функция Коши со знаком . 84

функция стробирования ...	84	экстремальное свойство	
функция Хевисайда	83	коэффициентов Фурье..	12
экспонента Гаусса.....	85	тригонометрический ряд	
экспонента Лапласа	83	определение	
экспонента Лапласа со		вещественная форма.....	14
знаком	84	комплексная форма.....	15
свертка периодических		почленное	
функций	21	дифференцирование	36
свойства	22	почленное интегрирование	
символ		34
Кroneкера	102	равенство Парсеваля.....	19
синус-преобразование Фурье		равномерная сходимость..	15
определение.....	68	тригонометрический ряд	
теорема		Фурье	
Дирихле	31	определение.....	17
равномерная сходимость		разложение нечетной	
.....	28	функции	39
сходимость в точке	28	разложение четной функции	
неравенство Бесселя	11	38
неравенство Буняковского .	9	частотный спектр.....	90
о проекции	10	ядро Дирихле.....	27
Пифагор	10	ядро преобразования	101

Библиографический список

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. М.: ФМ, 1961.
2. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его применения. М.: ФМ, 1963.
3. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. М.: ИЛ, 1948.
4. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Киев: Вища школа, 1985.
5. Зигмунд К. Тригонометрические ряды. Т.1-2. М.: Мир, 1965.
6. Князев П.Н. Интегральные преобразования. Минск: Высшэйшая школа, 1969.
7. Привалов И.И. Ряды Фурье. М.: ОНТИ, 1934.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. М.: Наука, 1974.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: ИЛ, 1955.
10. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ОГИЗ, 1948.
11. Толстов Г.П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
12. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Часть 3. М.: Наука, 1970.
13. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. Т.1, 2. М.: Мир, 1985.